

正弦交流电路的应用十分广泛，发电厂发出的电，输电线输送的电，以及工业用电和民用用电几乎都是正弦交流电。本章主要学习电路基本元件的相量模型、基本定律的相量形式、阻抗、导纳、正弦交流电路的相量分析法及正弦交流电路的功率、功率因素及功率因素的提高、正弦交流电路的谐振。

## 2.1 正弦量的基本概念

### 2.1.1 正弦量的三要素

第一章我们分析的是直流电路，其中的电流和电压的方向（或电压的极性）是不随时间而变化的。在生产上和日常生活中所用的交流电，一般都是指正弦交流电，它们是按正弦规律变化的。正弦交流电的相关知识是电工学中很重要的一个部分。

在正弦交流电路中，电压和电流的大小和方向随时间按正弦规律变化。凡按照正弦规律变动的电压、电流等统称正弦量。正弦量的特征表现在变化的快慢、大小及初始值三个方面，而它们分别由振幅值（或有效值）、频率（或周期）和初相位来确定，简称正弦量的三要素。以正弦电流为例，如式（2-1）所示，其波形图如图 2-1 所示。对于给定的参考方向，正弦量的一般解析函数式为

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-1)$$

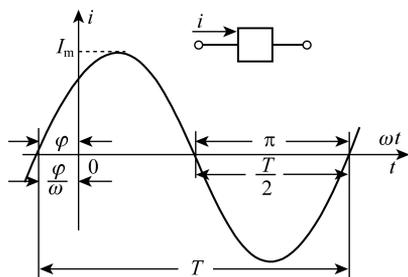


图 2-1 正弦量的波形图

### 1. 瞬时值和振幅值

交流量任一时刻的值称瞬时值，用小写字母来表示，如  $i$ 、 $u$  分别表示电流、电压的瞬时值。瞬时值中的最大值称为正弦量的振幅值，又称峰值。 $I_m$ 、 $U_m$  分别表示正弦电流、电压的振幅值。

### 2. 周期和频率

正弦量变化一周所需的时间称为周期。通常用“ $T$ ”表示，单位为秒（s）。实用单位有毫秒（ms）、微秒（ $\mu\text{s}$ ）、纳秒（ns）。正弦量每秒钟变化的周数称为频率，用“ $f$ ”表示，单位为赫兹（Hz）。周期和频率互成倒数，即

$$f = \frac{1}{T}$$

我国和大多数国家都采用 50Hz 作为电力标准频率，有些国家（如美国、日本等）采用 60Hz。这种频率在工业上应用广泛，习惯上也称为工频。通常的交流电动机和照明负载都用这种频率。

### 3. 相位、角频率和初相位

正弦量解析式中的  $(\omega t + \varphi)$  称为相位角或电工角，简称相位或相角，它反映出正弦量变化的进程。正弦量在不同的瞬间，有着不同的相位，因而有着不同的状态（包括瞬时值和变化趋势）。相位的单位一般为弧度（rad）。

相位角变化的速度  $\frac{d(\omega t + \varphi)}{dt} = \omega$  称为角频率，其单位为 rad/s。相位变化  $2\pi$ ，经历一个周期  $T$ ，则

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (2-2)$$

由式（2-2）可见，角频率是一个与频率成正比的常数。

$$i(t) = I_m \sin(2\pi f t + \varphi) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$$

$t=0$  时，相位为  $\varphi$ ，称为正弦量的初相。此时的瞬时值  $i(0) = I_m \sin\varphi$ ，称为初始值。如图 2-2 所示。

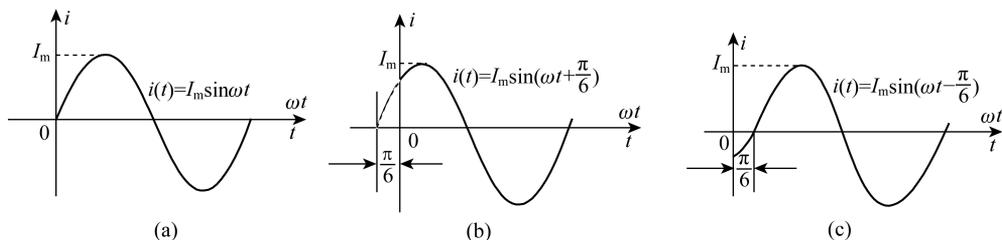


图 2-2 计时起点的选择

当  $\varphi=0$  时，正弦波的零点就是计时起点，如图 2-2（a）所示；当  $\varphi>0$ ，正弦波零点在计时起点之左，其波形相对于  $\varphi=0$  的波形左移  $\varphi$  角，如图 2-2（b）所示；当  $\varphi<0$ ，正

弦波零点在计时起点之右，其波形相对于  $\varphi=0$  的波形右移  $|\varphi|$  角，如图 2-2 (c) 所示。

以上确定  $\varphi$  角正负的零点均指离计时起点最近的那个零点。在图 2-3 中，确定  $\varphi$  角的零点是 A 点而不是 B 点， $\varphi=-90^\circ$  而不是  $270^\circ$ 。

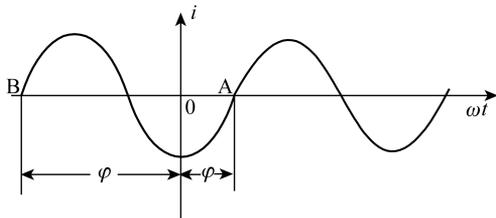


图 2-3 初相的规定

正弦交流电的最大值、频率和初相叫做正弦交流电的三要素。三要素描述了正弦交流电的大小、变化快慢和起始状态。

**例 2-1** 图 2-4 给出正弦电压  $u_1$  和正弦电流  $i_2$  的波形。 $u_1$  和  $i_2$  的最大值分别为 300mV 和 5mA，频率都为 1kHz，角频率为  $2000\pi\text{rad/s}$ ，初相分别为  $\frac{\pi}{3}$  和  $-\frac{\pi}{6}$ 。(1) 写出  $u_1$  和  $i_2$  的解析式并求出它们在  $t=100\text{ms}$  时的值。(2) 写出  $i_1$  的解析式并求出  $t=100\text{ms}$  时的值。

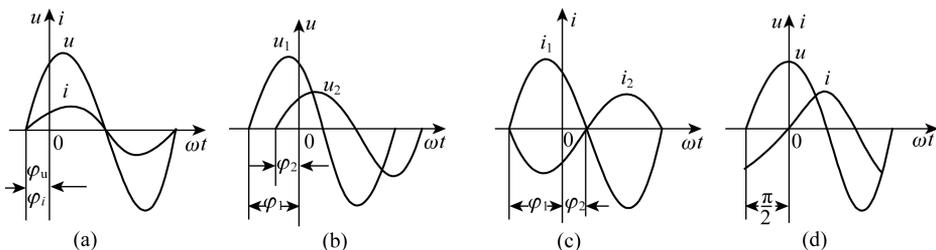


图 2-4 相位差的几种情况

**解：** $u_1$  和  $i_2$  的最大值分别为 300mV 和 5mA，频率都为 1kHz，角频率为  $2000\pi\text{rad/s}$ ，初相分别为  $\frac{\pi}{3}$  和  $-\frac{\pi}{6}$ 。它们的解析式分别为

$$u_1(t) = 300\sin\left(2000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ mV}, \quad i_2(t) = 5\sin\left(2000\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ mA}$$

(1)  $t=100\text{ms}$  时  $u_1$ 、 $i_2$  分别为

$$u_1(0.1) = 300\sin\left(2000\pi \times 0.1 + \frac{\pi}{3}\right) = 300\sin\frac{\pi}{3} = 150\sqrt{3} \text{ mV}$$

$$i_2(0.1) = 5\sin\left(2000\pi \times 0.1 - \frac{\pi}{6}\right) = -5\sin\frac{\pi}{6} = -2.5 \text{ mA}$$

(2)  $i_1(t) = -i_2 = 5\sin\left(2000\pi t - \frac{\pi}{6} + \pi\right) = 5\sin\left(2000\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ mA}$

$$i_1(0.1) = 5\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2.5\text{mA}$$

## 2.1.2 相位差

### 1. 相位差

两个正弦交流量，如果频率相同，最大值相等，但初相位不同，则这两个正弦交流量不能同时达到最大值或零。为了比较两个正弦交流量，我们引入相位差的概念，就是两个同频率正弦交流电的相位之差。

设有任意两个相同频率的正弦电流，其表达式分别为

$$\begin{aligned} i_1 &= I_{m1}\sin(\omega t + \varphi_{i1}) \\ i_2 &= I_{m2}\sin(\omega t + \varphi_{i2}) \end{aligned}$$

其波形如图 2-5 所示。

它们之间相位之差称为相位差，用  $\varphi$  或  $\varphi$  带双下标表示

$$\varphi = (\omega t + \varphi_{i1}) - (\omega t + \varphi_{i2}) = \varphi_{i1} - \varphi_{i2}$$

上式表明，同频率正弦交流电的相位之差，实质上就是它们的初相角之差。

对于  $u(t) = U_m\sin(\omega t + \varphi_u)$       $i(t) = I_m\sin(\omega t + \varphi_i)$

电压  $u$  与电流  $i$  的相位差： $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

当两个同频率正弦量的计时起点改变时，它们之间的初相也随之改变，但二者的相位差却保持不变。通常  $\varphi$  的范围亦为  $(-\pi, +\pi)$ 。

### 2. 相位差的几种情况

相位差与计时起点无关，是一个定数。我们只讨论同频率正弦量的相位差，这点要注意。如图 2-6。

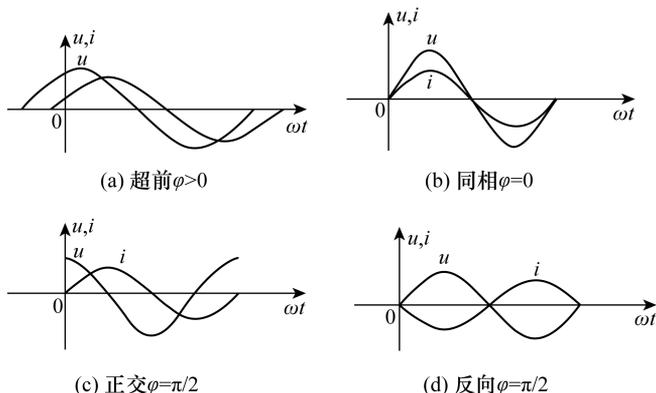


图 2-6 相位差

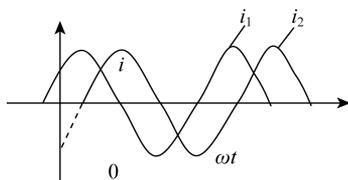


图 2-5 同频率两个正弦量

(1) 若  $\varphi > 0$ , 称电压  $u(t)$  超前  $i(t)$  一个角度  $\varphi$ 。若  $\varphi < 0$ , 称电压  $u(t)$  滞后于  $i(t)$  一个角度  $\varphi$ , 如图 2-6 (a) 所示。

(2) 若  $\varphi = 0$ , 即两个同频率正弦量的相位差为零, 称  $u(t)$  和  $i(t)$  同相位, 简称同相, 如图 2-6 (b) 所示。

(3) 若  $\varphi = \pi/2$ , 则称  $u(t)$  和  $i(t)$  相位正交, 如图 2-6 (c) 所示。

(4) 若  $\varphi = \pi$ , 则称  $u(t)$  和  $i(t)$  反相位, 简称反相, 如图 2-6 (d) 所示。

**例 2-2** 求两个正弦电流  $i_1(t) = -14.1\sin(\omega t - 120^\circ)$  A,  $i_2(t) = 7.05\cos(\omega t - 60^\circ)$  A 的相位差  $\varphi_{12}$ 。

**解:** 把  $i_1(t)$  和  $i_2(t)$  写成标准的解析式, 求出二者的初相, 再求出相位差。

$$i_1(t) = 14.1\sin(\omega t - 120^\circ + 180^\circ) = 14.1\sin(\omega t + 60^\circ)$$

$$i_2(t) = 7.05\sin(\omega t - 60^\circ + 90^\circ) = 7.05\sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

### 2.1.3 正弦量的有效值

正弦电流和电压的大小往往不是用它们的幅值, 而是常用有效值 (均方根值) 来计量的。

交流电的有效值是根据它的热效应确定的。如某一交流电流和一直流电流分别通过同一电阻  $R$ , 在一个周期  $T$  内所产生的热量相等, 那么这个直流电流  $I$  的数值叫做交流电流的有效值。

$$\text{由此得出: } I^2 RT = \int_0^T i^2(t) R dt$$

所以, 交流电流的有效值为:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (2-3)$$

同理, 交流电压的有效值为:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (2-4)$$

对于正弦交流电流:  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

代入式 (2-3), 它的有效值为:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (2-5)$$

$$\text{同理: } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

按照规定, 有效值都用大写字母表示, 和表示直流的字母一样。

一般所讲的正弦电压或电流的大小, 例如交流电压 380V 或 220V, 都是指它的有效值。一般交流电流表和电压表的刻度也是根据有效值来定的。

**例 2-3** 一个正弦电流的初相角为  $60^\circ$ ，在  $\frac{T}{4}$  时电流的值为 5A，试求该电流的有效值。

**解：**该正弦电流的解析式为： $i(t) = I_m \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ A} = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}$

由已知得： $5 = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = I_m \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{I_m}{2}$

$$I_m = 10 \text{ A}$$

对应的有效值： $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.07 \text{ A}$

## 2.2 正弦量的相量表示法

### 2.2.1 正弦量的表示方法

如上节所述，一个正弦量具有幅值频率及初相位三个特征。而这些特征可以用一些方法表示出来。正弦量的各种表示方法是分析与计算正弦交流电路的工具。

正弦交流电的表示方法有三角函数法、波形图法及相量表示法三种方法：

1. 三角函数法：用三角函数式来表示，如  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ ，这是正弦量的基本表示法。

2. 波形图法：用正弦波形来表示，如图 2-7 所示：

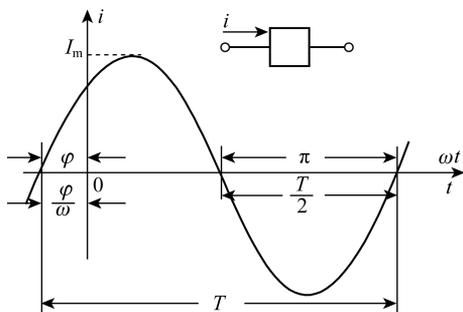


图 2-7 正弦量的波形图

3. 相量表示法：用相量来表示，如： $\dot{I} = I \angle \varphi$ 。

### 2.2.2 正弦量用旋转有向线段表示

设有一正弦电压  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ ，其波形如图 2-8 右图所示，左图是直角坐标系中的一旋转有向线段。有向线段的长度代表正弦量的幅值  $U_m$ ，它的初始位置 ( $t=0$  时的

位置) 与横轴正方向之间的夹角等于正弦量的初相位  $\varphi$ 。并以正弦量的角频率  $\omega$  作为逆时针方向旋转。可见, 这一旋转有向线段具有正弦量的三个特征, 故可以用来表示正弦量。正弦量的某时刻的瞬时值就可以由这个旋转有向线段于该瞬时在纵坐标轴上的投影表示出来。

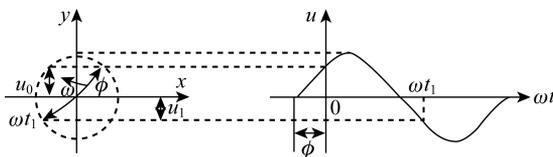


图 2-8 正弦量的相量图

### 2.2.3 正弦量的相量表示

正弦量的各种表示方法是分析与计算正弦交流电路的工具。我们已经讲过两种表示法。一种是用三角函数式来表示; 一种是用正弦波来表示。

此外, 正弦量还可以用相量来表示。相量表示法的基础是复数, 就是用复数来表示正弦量。正弦量可用旋转有向线段表示, 而有向线段可用复数表示, 所以正弦量也可用复数来表示。

#### 1. 复数和复数形式

令一直角坐标系的横轴表示复数的实部, 称为实轴, 以+1 为单位; 纵轴表示虚部, 称为虚轴, 以+j 为单位。实轴和虚轴构成的平面称为复平面。设  $A$  为复数, 如图 2-9, 其表示形式有:

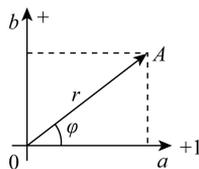


图 2-9 复数表示正弦量

$$A = a + jb \quad (2-6)$$

式中:  $a = r \cos \varphi$   $b = r \sin \varphi$

复数的模:  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  复数的辐角  $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$

所以,

$$A = a + jb = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (2-7)$$

由欧拉公式:  $\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$   $\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$

可得:  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$

可写成  $A = r e^{j\varphi} \quad (2-8)$

或简写为

$$A = r \angle \varphi \quad (2-9)$$

以上可归结为  $A = a + jb = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r e^{j\varphi} = r \angle \varphi$

因此, 一个复数可用上述几种复数形式来表示。式 2-6 称为复数的代数形式; 式 2-7 称为复数的三角形式; 式 2-8 称为复数的指数形式; 式 2-9 称为复数的极坐标形式。

## 2. 复数的四则运算

### (1) 复数的加减法

设  $A_1 = a_1 + jb_1 = r_1 \angle \theta_1$   $A_2 = a_2 + jb_2 = r_2 \angle \theta_2$

则  $A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

复数相加减矢量图如图 2-10 所示。

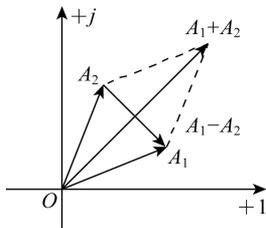


图 2-10 复数相加减矢量图

### (2) 复数的乘除法

$$A \cdot B = r_1 \angle \theta_1 \cdot r_2 \angle \theta_2 = r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

## 3. “j” 的数学意义和物理意义

在图 2-11 中, 设相量  $\dot{A} = re^{j\psi}$ , 相量  $\dot{A}$  乘以  $e^{j90^\circ}$ , 将  $\dot{A}$  逆时针旋转  $90^\circ$ , 得到  $\dot{B}$ ; 相量  $\dot{A}$  乘以  $e^{-j90^\circ}$ , 将  $\dot{A}$  顺时针旋转  $90^\circ$ , 得到  $\dot{C}$ 。因为  $e^{\pm j90^\circ} = \cos 90^\circ \pm j \sin 90^\circ = \pm j$ , 因此任意一个相量乘以  $+j$  后, 即逆时针旋转了  $90^\circ$ ; 乘以  $-j$  后, 即顺时针旋转了  $90^\circ$ 。所以  $j$  称为旋转  $90^\circ$  的算子。

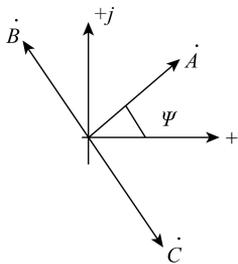


图 2-11 相量的超前与滞后

显然, 如果将实轴的单位相量  $+1$  乘以算子  $+j$ , 则该单位相量  $+1$  就逆时针旋转  $90^\circ$ , 变为虚轴的单位相量  $+j$ ; 如将虚轴的单位相量  $+j$  乘以算子  $+j$ , 则也要逆时针旋转  $90^\circ$ , 就变成实轴的单位相量  $-1$ , 即  $(+j) \cdot (+j) = j^2 = -1$ ,  $j = \sqrt{-1}$ , 这就是复数中的虚数单位。

**注意:**

- (1) 相量是表示正弦量的复数。
- (2) 只有同频率的正弦量才能画在同一相量图上。

(3) 表示正弦量的相量有两种形式：相量图和相量式（复数式）。

(4) 相量只是表示正弦量，而不是等于正弦量

**例 2-4** 已知正弦电压  $u_1(t) = 141 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$  V,  $u_2(t) = 70.5 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$  V, 写出  $u_1$  和  $u_2(t)$  的相量, 并画出相量图。

$$\text{解: } u_1(t) \leftrightarrow \dot{U}_1 = \frac{141}{\sqrt{2}} \angle \frac{\pi}{3} = 100 \angle \frac{\pi}{3} \text{ V}$$

$$u_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_2 = \frac{70.5}{\sqrt{2}} \angle -\frac{\pi}{6} = 50 \angle -\frac{\pi}{6} \text{ V}$$

相量图如图 2-12 所示。

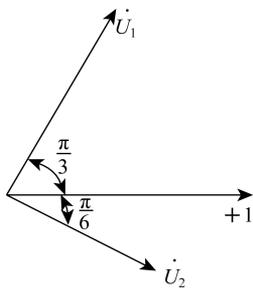


图 2-12 例 2-4 电路图

## 2.2.4 两个同频率正弦量之和

### 1. 两个同频率正弦量的相量之和

同频率的两个正弦量相加, 得到的仍然是一个同频率的正弦量。

设有两个同频率正弦量

$$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2(t) = U_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) = \sqrt{2} U_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

利用三角函数, 可以得出它们之和为同频率的正弦量, 即

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi)$$

其中  $U = \sqrt{(U_1 \cos \varphi_1 + U_2 \cos \varphi_2)^2 + (U_1 \sin \varphi_1 + U_2 \sin \varphi_2)^2}$

$$\varphi = \arctan \frac{U_1 \sin \varphi_1 + U_2 \sin \varphi_2}{U_1 \cos \varphi_1 + U_2 \cos \varphi_2}$$

可以看出, 要求出同频率正弦量之和, 关键是求出它的有效值和初相。

可以证明, 若  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ , 则有  $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$

### 2. 求相量之和的步骤

(1) 写出相应的相量, 并表示为代数形式。

(2) 按复数运算法则进行相量相加, 求出和的相量。

(3) 作相量图, 按照矢量的运算法则求相量和。

图 2-13 表示两个相量加减的三角形法则。

图 2-14 表示多个相量加减的多边形法则。

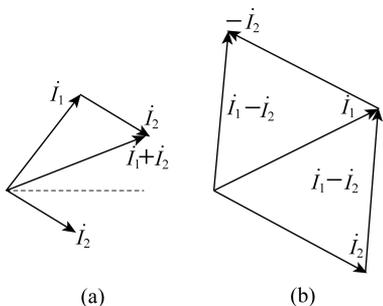


图 2-13 两个相量加减的三角形法则

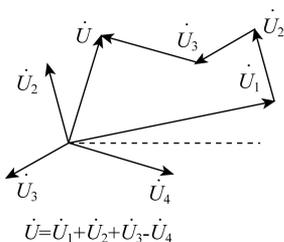


图 2-14 相量加减的多边形法则

## 2.3 电阻元件、电容元件和电感元件

电阻元件、电容元件与电感元件都是组成电路模型的理想元件。所谓理想, 就是突出元件的主要电磁性质, 而忽略次要因素。如前一章所述, 电阻元件具有消耗电能的性质(电阻性), 其它电磁性质均可忽略不计。同样, 对电容元件, 突出其上加了电压要产生电场而存储电场能量的性质(电容性); 对电感元件, 突出其中通过电流要产生磁场而存储磁场能量的性质(电感性)。电阻元件是耗能元件, 后两者是储能元件。前一章所讨论的是电阻电路, 只引入了电阻元件。今后所讨论的各种电路中, 除电阻元件外, 还有电容元件和电感元件。电路元件都由相应的参数来表征。

### 2.3.1 电阻元件

当电流流过金属导体时, 导体对电流的阻碍作用就称为电阻, 用字母  $R$  表示。其单位是欧姆, 简称欧, 符号是  $\Omega$ 。

电阻元件具有消耗电能的性质(电阻性), 其他电磁性质均可忽略不计。

在图 2-15 中,  $u$  和  $i$  的参考方向相同, 根据欧姆定律得出

$$u = iR \quad (2-10)$$

即电阻元件上的电压与通过的电流成线性关系。

如将式 (2-10) 两边乘以  $i$ , 并积分之, 则得

$$W = \int_0^t u i dt = \int_0^t R i^2 dt \geq 0$$

上式表明电能全部消耗在电阻上, 转换为热能。

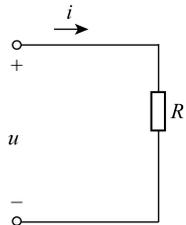


图 2-15 电阻元件

金属导体的电阻与导体的尺寸及导体材料的导电性能有关，即

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

式中  $\rho$  称为电阻率，它是一个表示对电流起阻碍作用的物理量。在国际单位制中，电阻率的单位为欧 [姆] · 米 ( $\Omega \cdot \text{m}$ )。

## 2.3.2 电容元件

### 1. 电容元件

电容是以聚集电荷的形式，储存电能的二端元件，是一种电子元件，由绝缘体或电介质材料隔离的两个导体组成。电容的电路参数用字母  $C$  表示。若在电容器两极间加一直流电压，电源将向电容器充电，使电容器的两极积聚了数量相等、符号相反的电荷  $q$ ，两极间建立了电场并具有一定的电压  $u$ 。积聚的电荷愈多，所形成的电场就愈强，电容元件所储存的电场能也就愈大。

电容元件是各种实际电容器的理想化模型，其符号如图 2-16 (a) 所示。

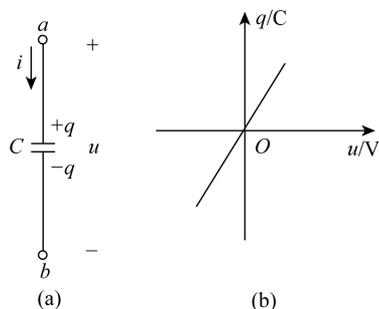


图 2-16 理想电容的符号和特性

电荷量与端电压的比值叫做电容元件的电容，理想电容器的电容为一常数，电荷量  $q$  总是与端电压  $u$  成线性关系，即

$$q = Cu \quad (2-11)$$

国际单位制 (SI) 中电容的单位为法拉，简称法，符号为 F。常用单位有，微法 ( $\mu\text{F}$ )，皮法 ( $\text{pF}$ )。式 (2-11) 表示的电容元件电荷量与电压之间的约束关系，称为线性电容的库伏特性，它是过坐标原点的一条直线，如图 2-16 (b) 所示。

### 2. 电容元件的伏安特性

当极板上的电荷  $q$  或电压  $u$  发生变化时，在电路中要引起电流。

对于图 2-16 (a)，当  $u$ 、 $i$  取关联参考方向时，结合式 (2-11)，有

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (2-12)$$

当  $u$ 、 $i$  为非关联参考方向时，有  $i = -C \frac{du}{dt}$

电容的伏安特性说明：任一瞬间，电容电流的大小与该瞬间电压变化率成正比，而与这一瞬间电压大小无关。

对式(2-12)进行积分可求出某一时刻电容的电压值。任选初始时刻 $t_0$ 。以后， $t$ 时刻的电压为 $u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt$ ，若取 $t_0 = 0$ ，则 $u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$

### 3. 电容元件的电场能

关联参考方向下，电容吸收的功率如式(2-13)所示。

$$p = iu = Cu \frac{du}{dt} \quad (2-13)$$

电容元件从 $u(0) = 0$  (电场能为零) 增大到 $u(t)$  时，总共吸收的能量，即 $t$ 时刻电容的电场能量如式(2-14)所示。

$$W_c(t) = \int_0^t p dt = \int_0^t Cu du = \frac{1}{2} Cu^2(t) \quad (2-14)$$

当电容电压由 $u$  减小到零时，释放的电场能量也按上式计算。

动态电路中，电容和外电路进行着电场能和其它能的相互转换，本身不消耗能量。

**例 2-4** (1)  $2\mu\text{F}$  电容两端的电压由 $t = 1\mu\text{s}$  时的 $6\text{V}$  线性增长至 $t = 5\mu\text{s}$  时的 $50\text{V}$ ，试求在该时间范围内的电流值及增加的电场能。

(2) 原来不带电荷的 $100\mu\text{F}$  的电容器，今予以充电，充电电流为 $1\text{mA}$ ，持续时间为 $2\text{s}$ ，求电容器充电后的电压。假定电压、电流都为关联参考方向。

**解：**(1) 由式(2-12)得 $i = C \frac{du}{dt} = 2 \times 10^{-6} \times \frac{50 - 6}{(5 - 1) \times 10^{-6}} = 22\text{A}$

增加的电场能量

$$\Delta W_c(t) = \frac{1}{2} Cu_2^2 - \frac{1}{2} Cu_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-6} (2500 - 36) = 2.464 \times 10^{-3} \text{J}$$

(2) 由 $u(t)$  公式和已知条件 $u(0) = 0$ ，求出 $2\text{s}$  末的电压

$$u(2) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^2 i dt = \frac{1}{100 \times 10^{-6}} \times 2 \times 10^{-3} = 20\text{V}$$

### 4. 电容的串并联

(1) 电容的并联如图 2-17 所示。

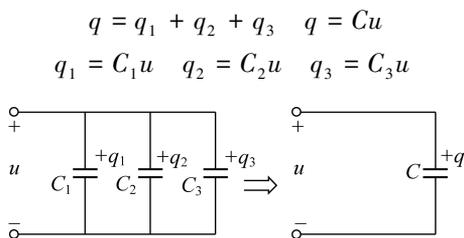


图 2-17 电容的并联

对于线性电容元件有代入电荷量关系式得

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \quad (2-15)$$

等效电容等于各并联电容之和，如式(2-15)所示。当电容器的耐压值符合要求，但容量不够时，可将几个电容并联。

(2) 电容的串联如图 2-18 所示

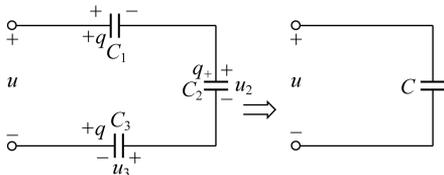


图 2-18 电容的串联

对于线性电容元件有

$$u = \frac{q}{C}, \quad u_1 = \frac{q}{C_1}, \quad u_2 = \frac{q}{C_2}, \quad u_3 = \frac{q}{C_3}$$

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

代入电压关系式得

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (2-16)$$

电容串联的等效电容的倒数等于各电容倒数之和，如式(2-16)所示。电容的串联使总电容值减少。每个电容的电压为

$$u_1 = \frac{C}{C_1}u \quad u_2 = \frac{C}{C_2}u \quad u_3 = \frac{C}{C_3}u$$

当电容器的电容量足够而耐压值不够时，可将电容器串联使用，但对小电容分得的电压值大这一点应特别注意。

**例 2-6** 电容都为  $0.3\mu\text{F}$ ，耐压值同为  $250\text{V}$  的三个电容器  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  的连接如图 2-19 所示。试求等效电容，问端口电压值不能超过多少？

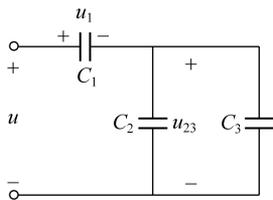


图 2-19 例 2-6 电路图

**解：** $C_2$ 、 $C_3$  并联等效电容

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 0.6\mu\text{F}$$

总的等效电容

$$C = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{0.3 \times 0.6}{0.3 + 0.6} = 0.2\mu\text{F}$$

$C_1$  小于  $C_{23}$ , 则  $u_1 > u_{23}$ , 应保证  $u_1$  不超过其耐压值 250V。当  $u_1 = 250\text{V}$  时,

$$u_{23} = \frac{C_1}{C_{23}} u_1 = \frac{0.3}{0.6} \times 250 = 125\text{V}$$

所以端口电压不能超过  $u = u_1 + u_{23} = 250 + 125 = 375\text{V}$

### 2.3.3 电感元件

电感元件是一种储能元件, 电感元件的原始模型为导线绕成圆柱线圈。当线圈中通以电流  $i$ , 在线圈中就会产生磁通量  $\Phi$ , 并储存能量。表征电感元件 (简称电感) 产生磁通, 存储磁场的能力的参数, 也叫电感, 用  $L$  表示, 它在数值上等于单位电流产生的磁链。

#### 1. 电感元件

电感元件是实际电感线圈的理想化模型。其符号如图 2-20 所示。

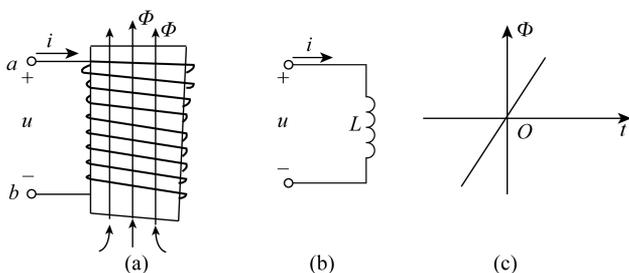


图 2-20 电感元件的符号和特性

如图 2-20 (a) 所示, 在 SI 中,  $\Phi$  的单位为韦伯 (Wb)。

$L$  叫做电感元件的电感或自感, 电感元件的电感为一常数, 磁链  $\Psi$  总是与产生它的电流  $i$  成线性关系, 即

$$\Psi = Li \quad (2-17)$$

在国际单位制 (SI) 中, 电感的单位为亨 (利), 符号为 H, 常用的单位有毫亨 (mH)、微亨 ( $\mu\text{H}$ )。  $\psi$  的单位为韦 (伯)。式 (2-17) 所表示的电感元件磁链与产生它的电流之间的约束关系称为线性电感的韦安特性, 是过坐标原点的一条直线, 如图 2-20 (c) 所示。

#### 2. 电感元件的伏安特性

根据电磁感应定律, 感应电压等于磁链的变化率。当电压的参考极性与磁通的参考方向符合右手螺旋定则时, 可得  $u = \frac{d\Psi}{dt}$ 。

当电感元件中的电流和电压取关联参考方向时, 结合式 (2-17) 有

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{dLi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (2-18)$$

当  $u$ 、 $i$  为非关联参考方向时, 有  $u = -L \frac{di}{dt}$ 。

电感元件的伏安特性说明：任一瞬间，电感元件端电压的大小与该瞬间电流的变化率成正比，而与该瞬间的电流无关。电感元件也称为动态元件，它所在的电路称为动态电路。电感对直流起短路作用。

对式 (2-18) 进行积分可求出某一时刻电感的电流值。任选初始时刻  $t_0$  后， $t$  时刻的电流为  $i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u dt$ 。

若取  $t_0=0$ ，则  $i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u dt$

### 3. 电感元件的磁场能

关联参考方向下，电感吸收的功率

$$p = ui = Li \frac{di}{dt}$$

电感电流从  $i(0)=0$  增大到  $i(t)$  时，总共吸收的能量，即  $t$  时刻电感的磁场能量

$$W_L(t) = \int_0^t p dt = \int_0^t L i di = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

当电感的电流从某一值减小到零时，释放的磁场能量也可按上式计算。在动态电路中，电感元件和外电路进行着磁场能与其它能相互转换，本身不消耗能量。

**例 2-7** 电感元件的电感  $L=100\text{mH}$ ， $u$  和  $i$  的参考方向一致， $i$  的波形如图 2-21 (a) 所示，试求各段时间元件两端的电压  $u_L$ ，并作出  $u_L$  的波形，计算电感吸收的最大能量。

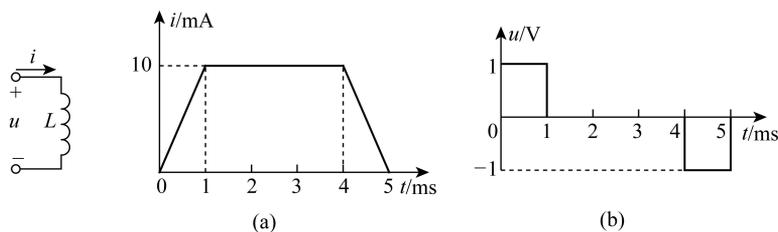


图 2-21 例 2-7 图

**解：** $u_L$  与  $i$  所给的参考方向一致，各段感应电压为

(1) 0~1ms 间，

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 100 \times 10^{-3} \times \frac{10 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3}} = 1\text{V}$$

(2) 1~4ms 间，电流不变化，得  $u_L=0$

(3) 4~5ms 间，

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 100 \times 10^{-3} \times \frac{0 - 10 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3}} = -1\text{V}$$

$u_L$  的波形如图 2-21 (b) 所示。

吸收的最大能量： $W_{L\max} = \frac{1}{2} L i_m^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-3} \times (10 \times 10^{-3})^2 = 5 \times 10^{-6}\text{J}$

## 2.4 电路元件的相量模型

分析各种正弦交流电路，不外乎要确定电路中电压与电流之间的关系（大小和相位），并讨论电路中能量的转换和功率问题。

分析各种交流电路时，我们必须首先掌握单一参数（电阻、电感、电容）元件电路中电压与电流之间的关系，因为其它电路无非是一些单一参数元件的组合而已。

### 2.4.1 电阻元件的相量模型

#### 1. 伏安特性

在图 2-22 (a) 中，设电流为  $i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi_i)$

则有  $u(t) = Ri = \sqrt{2}RI\sin(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi_u)$ 。

电阻两端电压  $u$  和电流  $i$  之间关系如式 (3-19) 所示：

$$\left. \begin{aligned} U &= RI \\ \varphi_i &= \varphi_u \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

上述表明：电流与电压的频率相同，相位相同，数值之间仍符合欧姆定律。

$\varphi_i = 0$  时电阻上电压相量和电流相量的关系为：

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \varphi_u}{I \angle \varphi_i} = R$$

$$\dot{U} = R \dot{I}$$

根据式 (2-19)，画出电阻的相量模型电路如图 2-22 (b) 所示，相量图如图 2-22 (c) 所示。

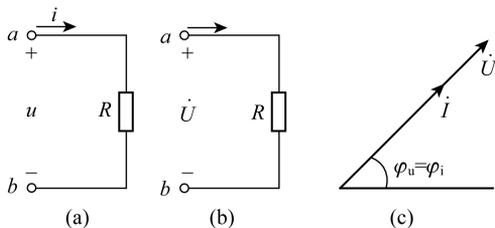


图 2-22 电阻元件的相量模型及相量图

#### 2. 功率

##### (1) 瞬间功率

关联参考方向下电阻元件吸收的瞬时功率  $p = ui$ ，为了计算方便令  $\varphi_i = 0$

$$p = \sqrt{2}U\sin\omega t \cdot \sqrt{2}I\sin\omega t = 2UI\sin^2\omega t = UI(1 - \cos^2\omega t) \geq 0$$

其波形如图 2-23 所示。

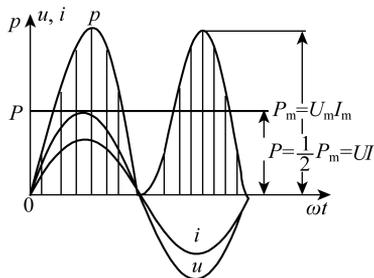


图 2-23 电阻元件  $i$ 、 $u$ 、 $p$  波形

由于电阻元件的交流电路中  $u$  和  $i$  同相，它们同时为正，同时为负，所以瞬时功率总是正值，即  $p \geq 0$ 。瞬时功率为正，这表示外电路从电源取用能量。

在这里就是电阻元件从电源取用电能而转换为热能，这是一种不可逆的能量转换过程。

### (3) 平均功率

平均功率定义为瞬时功率  $p$  在一个周期  $T$  内的平均值，用大写字母  $P$  表示。即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI(1 - \cos^2 \omega t) dt = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad (2-20)$$

式 (2-20) 又称为有功功率，它表示一个周期内电路消耗电能的平均速率，其单位是瓦 (W) 或千瓦 (kW)。

**例 2-8** 一电阻  $R=100\Omega$ ，通过的电流  $i(t)=1.41\sin(\omega t-30^\circ)\text{A}$ 。试求：(1)  $R$  两端电压  $U$  和  $u$ ；(2)  $R$  消耗的功率  $P$ 。

**解：**(1) 电流： $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1.41}{\sqrt{2}} = 1\text{A}$

电压： $U = RI = 100 \times 1 = 100\text{V}$

$u(t) = Ri = 100 \times 1.41\sin(\omega t - 30^\circ) = 141\sin(\omega t - 30^\circ)\text{V}$

或利用相量关系求解

$$\dot{I} = \frac{1.41}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ = 1 \angle -30^\circ$$

$$\dot{U} = R\dot{I} = 100 \times \angle -30^\circ = 100 \angle -30^\circ$$

对应的正弦量： $u(t) = 100\sqrt{2}\sin(\omega t - 30^\circ) = 141\sin(\omega t - 30^\circ)\text{V}$

有效值： $U = 100\text{V}$

(2)  $R$  消耗的功率： $P = UI = 1 \times 100 = 100\text{W}$

## 2.4.2 电感元件的相量模型

电阻为零的纯电感元件，如果接到直流电源上，则电源被短路；如果接到交流电源

上,情况就完全不同,变化的电流流过电感线圈,将使其中的磁通 $\Phi$ 随之变化,从而在线圈中产生自感电动势。

### 1. 伏安特性

在图 2-24 (a) 中,设通过电感元件的电流为: $i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi_i)$ , 则有:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = \sqrt{2}\omega LI\cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}\omega LI\sin(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi_u)$$

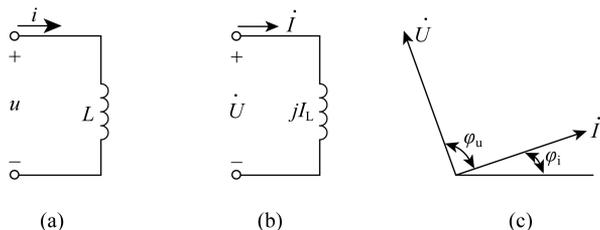


图 2-24 电感元件的相量模型及相量图

上式表明:电感两端电压 $u$ 和电流 $i$ 是同频率的正弦量,电压超前电流 $90^\circ$ 。用 $X_L$ 表示 $\omega L$ 后,电压和电流有效值关系为

$$U = X_L I \quad \varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \quad (2-21)$$

而式(2-21)中: $\omega L$ 称为感抗,单位为欧姆。

感抗的倒数: $B = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$ 称为感纳,单位为西门子(S)。

电感电流相量和电压相量的关系为

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \varphi_u}{I \angle \varphi_i} = jX_L \quad \dot{U} = jX_L \dot{I} \quad (2-22)$$

由式(2-22)画出电感的相量模型如图 2-24 (b),相量图如图 2-24 (c) 所示。

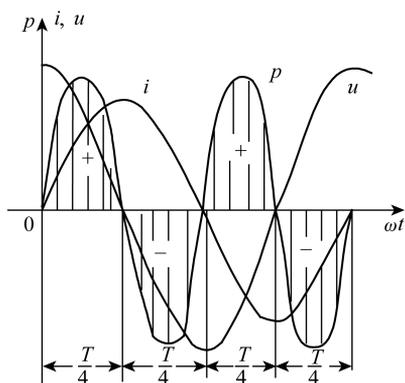
### 2. 功率

#### (1) 瞬时功率

在关联参考方向下,当 $\varphi_i = 0$ 时,电感吸收的瞬时功率为

$$p = ui = \sqrt{2}U\cos\omega t \cdot \sqrt{2}I\sin\omega t = UI\sin 2\omega t = X_L I^2 \sin 2\omega t$$

由上式可见, $p$ 是一个最大值为 $UI$ 或 $I^2 X_L$ ,并以 $2\omega$ 的角频率随时间而变化的交变量,如图 2-25 所示。在第一和第三个四分之一周期内,电流值在增大,即磁场在建立,电感线圈从电源取用电能,并转化为磁能而储存在线圈的磁场内;在第二和第四个四分之一周期内,电流值在减小,即磁场在消失,线圈放出原先储存的能量并转化为电能而归还给电源。这是一种可逆的能量转换过程。在这里,线圈从电源取用的能量一定等于它归还给电源的能量。


 图 2-25 电感元件的  $i$ ,  $u$ ,  $p$  波形

电感储存磁场能量

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}LI_m^2(1 - \cos 2\omega t)$$

磁场能量在最大值  $W_{L\max} = \frac{1}{2}LI_m^2$  和零之间周期性地变化，总是大于零。

(2) 平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0$$

从上述可知，在电感元件的交流电路中，没有能量消耗，只有电源与电感元件间的能量互换。为了衡量电源与电感元件间交换能量的规模，引入无功功率  $Q_L$ 。我们规定无功功率等于瞬时功率的幅值，如式 (2-23) 所示。

$$Q_L = UI = X_L I^2 = \frac{U^2}{X_L} \quad (2-23)$$

它并不等于单位时间内互换了多少能量。无功功率的单位是乏 (var) 或千乏 (kvar)。

**例 2-9** 流过 0.1H 电感的电流为  $i(t) = 15\sqrt{2} \sin(200t + 10^\circ)$  A，试求关联参考方向下电感两端的电压  $u$  及无功功率，磁场能量的最大值。

**解：**用相量关系求解

$$\dot{I} = 15 \angle 10^\circ \text{ A}, \quad \dot{U} = jX_L \dot{I} = j200 \times 0.1 \times 15 \angle 10^\circ = 300 \angle 100^\circ \text{ V}$$

对应的正弦电压： $u(t) = 300\sqrt{2} \sin(200t + 100^\circ)$  V

无功功率： $Q_L = UI = 300 \times 15 = 4500 \text{ var}$

磁场能量的最大值： $W_{L\max} = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (\sqrt{2})^2 \times 15^2 = 22.5 \text{ J}$

## 2.4.3 电容元件的相量模型

交流电路中，当电压发生变化时，电容器极板上的电荷也要随着发生变化，在电路中

就会引起电流。

### 1. 伏安特性

在图 2-26 (a) 中, 设加在电容两端的电压为  $u(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi_u)$ , 根据电容元件中电容、电压、电流之间的关系:  $i(t) = C \frac{du}{dt}$ , 得到

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = \sqrt{2}\omega CU\cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi_i)$$

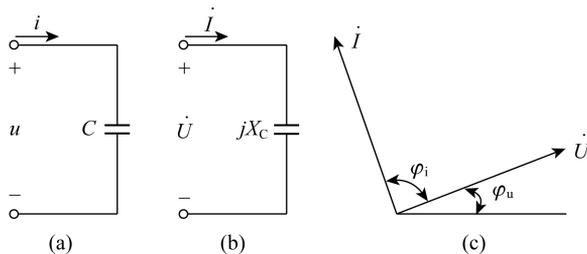


图 2-26 电容元件的相量模型及相量图

上式表明, 电容电流和端电压是同频率的正弦量, 电流超前电压  $90^\circ$ 。令  $X_c = \frac{1}{\omega C}$ , 电流和电压的关系为

$$U = X_c I \quad \varphi_i = \varphi_u + 90^\circ \quad (2-24)$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{U}{I} \quad (2-25)$$

式 (2-25) 容抗的倒数:

$$B_c = \frac{1}{X_c} = \omega C \quad (2-26)$$

式 (2-26) 称为容纳, 单位是西门子 (S), 电容电流相量和电压相量的关系为

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \varphi_u}{I \angle \varphi_i} = -jX_c \quad \dot{U} = -jX_c \dot{I}$$

由式 (2-24) 画出电容元件的相量模型如图 2-26 (b) 所示, 相量图如图 2-26 (c) 所示。

### 2. 功率

(1) 瞬时功率为

$$p(t) = ui = \sqrt{2}U\sin\omega t \cdot \sqrt{2}I\cos\omega t = 2UI\sin\omega t \cdot \cos\omega t = UI\sin 2\omega t = I^2 X_c \sin 2\omega t$$

如图 2-27 所示, 最大值为  $UI$  或  $I^2 X_c$ 。电容储存电场能量

$$W_c = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 \sin^2\omega t = \frac{1}{2}Cu^2(1 - \cos^2\omega t)$$

电场能量在最大值  $W_{C_{\max}} = \frac{1}{2}CU_m^2$  和 0 之间周期性地变化

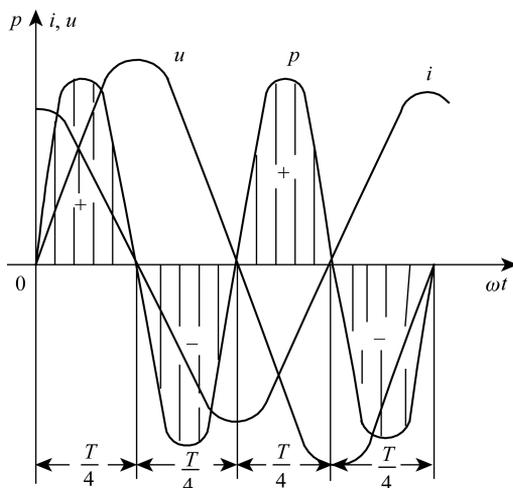


图 2-27 电容元件的  $u$ 、 $i$ 、 $p$  波形

(2) 平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0$$

(3) 无功功率

$$Q_c = UI = X_c I^2 = \frac{U^2}{X_c}$$

电容的无功功率的单位与电感的无功功率的单位相同。

**例 2-10** 流过 0.5F 电容的电流  $i(t) = \sqrt{2} \sin(100t - 30^\circ)$  A，试求关联参考方向下，电容的电压  $u$ ，无功功率和电场能量的最大值。

**解：**用相量关系求解

$$\dot{I} = 1 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U} = -jX_c \dot{I} = -j \frac{1}{100 \times 0.5} \times 1 \angle -30^\circ = 0.02 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$u(t) = 0.02\sqrt{2} \sin(100t - 120^\circ) \text{ V}$$

$$Q_c = UI = 0.02 \times 1 = 0.02 \text{ var}$$

$$W_{C_{\max}} = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times (0.02\sqrt{2})^2 = 0.0002 \text{ J}$$

## 2.5 RLC 串联电路

### 2.5.1 RLC 串联电路的电压与电流的关系

#### 1. 电压三角形

$R$ 、 $L$ 、 $C$  串联电路的交流电路如图 2-28 (a) 所示。电路的各元件通过同一电流。电流与各个电压的参考方向如图中所示。分析这种电路可以应用前面一节所得的结果。 $R$ 、 $L$ 、 $C$  串联电路的相量模型如图 2-28 (b) 所示。先选择参考相量。选择的方法：选已知量或公共量。在串联电路中，电流是公共量，所以取电流的相量为参考相量，设  $\dot{I} = I \angle 0^\circ$ ，作出相量图，如图 2-29 (a) 所示，图中设  $U_L > U_C$ ；图 2-29 (b) 中， $U_C > U_L$ ；图 2-29 (c) 中，则  $U_C = U_L$ 。

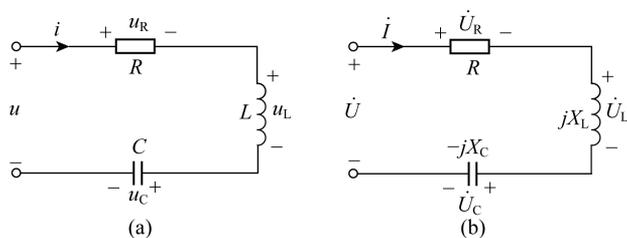


图 2-28 RLC 串联电路的相量

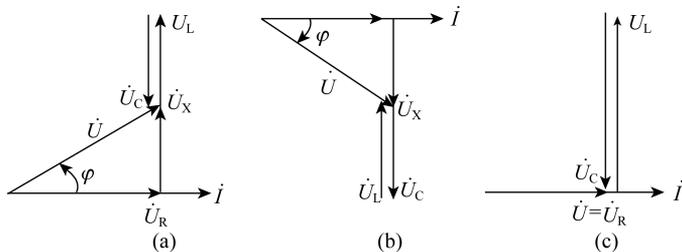


图 2-29 RLC 串联电路的相量图

显然， $\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_X$ 、 $\dot{U}$  组成一个直角三角形，称为电压三角形，由电压三角形可得

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$

$U$  也可以写成相量形式，如式 (2-27) 所示，

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_X + \dot{U}_C \quad (2-27)$$

式 (2-27) 是交流电路的基尔霍夫电压定律反映。且，

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_X + \dot{U}_C = [R + j(X_L - X_C)] \dot{I} = Z \dot{I}$$

## 2. 阻抗三角形

$$Z = R + j(X_L - X_C) = R + jX = |Z| \angle \varphi$$

其中  $X = X_L - X_C$  称为电抗,  $|Z|$  和  $\varphi$  分别称为复阻抗的模和阻抗角, 其关系如式 (2-28)、(2-29) 所示。

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \varphi = \arctan \frac{X}{R} \quad (2-28)$$

$$R = |Z| \cos \varphi \quad X = |Z| \sin \varphi \quad (2-29)$$

显然  $|Z|$ 、 $R$ 、 $X$  也组成一个直角三角形, 称为阻抗三角形 (图 2-30), 与电压三角形相似。设端口电压电流的相量分别为

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U \angle \varphi_u & \dot{I} &= I \angle \varphi_i \\ Z &= \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \varphi_u}{I \angle \varphi_i} = \frac{U}{I} \angle \varphi_u - \varphi_i = |Z| \angle \varphi \end{aligned}$$

由上式可得式 (2-30)

$$|Z| = \frac{U}{I} \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (2-30)$$

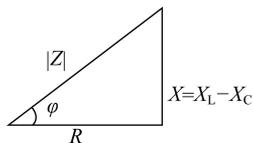


图 2-30 阻抗三角形

### 2.5.2 RLC 串联电路的三种性质

根据 RLC 串联电路的电抗:  $X = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

RLC 串联电路有以下三种不同性质:

(1) 当  $\omega L > 1/\omega C$  时,  $X > 0$ ,  $\varphi > 0$ ,  $U_L > U_C$ 。  $U_x$  超前电流  $90^\circ$ , 端口电压超前电流; 电路呈感性, 相量图如图 2-29 (a) 所示。

(2) 当  $\omega L < 1/\omega C$  时,  $X < 0$ ,  $\varphi < 0$ ,  $U_L < U_C$ ,  $U_x$  滞后电流  $90^\circ$ , 端口电压滞后电流; 电路呈容性, 相量图如图 2-29 (b) 所示。

(3) 当  $\omega L = 1/\omega C$  时,  $X = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $U_L = U_C$ 。  $Z = R$ 。端口电压与电流同相, 电路呈阻性。这是一种特殊状态, 称为谐振, 相量图如图 2-29 (c) 所示。

RL 串联电路、RC 串联电路、LC 串联电路、电阻元件、电感元件、电容元件都可以看成 RLC 串联电路的特例。  $R$ 、 $L$ 、 $C$  的复阻抗  $Z$  分别为  $R$ 、 $jX_L$ 、 $-jX_C$ ,  $\varphi$  分别为  $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $-90^\circ$ ,

$$RL \text{ 串联: } Z = R + jX_L = \sqrt{R^2 + X_L^2} \angle \arctan \frac{X_L}{R}$$

$$RC \text{ 串联: } Z = R - jX_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} \angle \arctan \frac{-X_C}{R}$$

**例 2-11** 图 2-31 (a) 所示为 RC 串联移相电路,  $u$  为输入正弦电压, 以  $u_c$  为输出电压。已知,  $C = 0.01 \mu\text{F}$ ,  $u$  的频率为  $6000 \text{ Hz}$ , 有效值为  $1 \text{ V}$ 。欲使输出电压比输入电压滞后  $30^\circ$ , 试问应选配多大的电阻  $R$ ? 在此情况下, 输出电压多大?

解：作出相量图，如图 2-31 (b) 所示。容性电路的阻抗角为负值，根据已知有

$$\varphi = -30^\circ$$

$$\varphi = \arctan \frac{-X_C}{R} = \arctan \frac{-1}{R\omega C} = -30^\circ$$

根据阻抗三角形  $X_C$  和  $R$  的关系：

$$\begin{aligned} R &= \frac{X_C}{\tan 30^\circ} \\ &= \frac{1}{\omega C \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1}{2\pi \times 6000 \times 0.01 \times 10^{-6} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= 4.6 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

在此情况下，输出电压： $U_C = U \sin 30^\circ = 1 \times 0.5 = 0.5 \text{ V}$

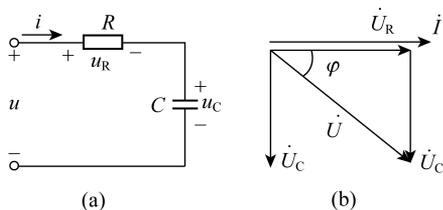


图 2-31 例 2-11 电路图

## 2.6 阻抗的串联与并联

在交流电路中，阻抗的连接形式是多种多样的，其中最简单和最常用的是串联与并联。

### 2.6.1 阻抗的串联

图 2-32 (a) 是两个阻抗串联的电路。根据基尔霍夫电压定律可写出它的相量表示式

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} = (Z_1 + Z_2) \dot{I} \quad (2-31)$$

两个串联的阻抗可用一个等效阻抗  $Z$  来代替，在同样电压的作用下，电路中电流的有效值和相位保持不变。根据图 2-32 (b) 所示的等效电路可写出

$$\dot{U} = Z \dot{I} \quad (2-32)$$

比较上列两式，则得

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (2-33)$$

因为一般  $U \neq U_1 + U_2$ ，所以  $|Z| \neq |Z_1| + |Z_2|$

由此可见，只有等效阻抗才等于各个串联阻抗之和。在一般的情况下，等效阻抗可写为

$$Z = \sum Z_k = \sum R_k + j \sum X_k = |Z| e^{j\varphi} \quad (2-34)$$

$$\text{式中：} |Z| = \sqrt{(\sum R_k)^2 + (\sum X_k)^2} \quad \varphi = \arctan \frac{\sum X_k}{\sum R_k}$$

在上列各式的  $\sum X_k$  中, 感抗  $X_L$  取正号, 容抗  $X_C$  取负号。

**例 2-12** 图 2-33 所示为有两个阻抗  $Z_1 = 6.16 + j9\Omega$ ;  $Z_2 = 2.5 - j4\Omega$  它们串连接在  $\dot{U} = 220 \angle 30^\circ \text{V}$  的电源; 求:  $\dot{i}$  和  $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$ , 并作相量图。

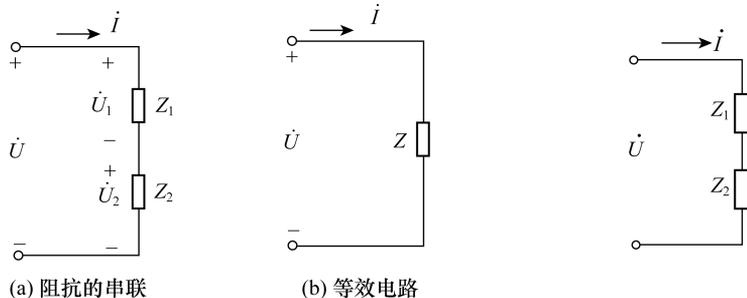


图 2-32 阻抗串联电路图

图 2-33 例 2-12 电路图

**解:** 这是两个电阻串联的情况, 所以

$$Z = Z_1 + Z_2 = (6.16 + 2.5) + j(9 - 4) = 8.66 + j5 = 10 \angle 30^\circ \Omega$$

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220 \angle 30^\circ}{10 \angle 30^\circ} = 22 \angle 0^\circ \text{A}$$

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{i} = (6.16 + j9) \times 22 \text{V} = 10.9 \angle 55.6^\circ \times 22 \text{V} = 239.8 \angle 55.6^\circ \text{V}$$

$$\text{同理: } \dot{U}_2 = Z_2 \dot{i} = (2.5 - j4) \times 22 \text{V} = 103.6 \angle -58^\circ \text{V}$$

相量图如图 2-34 所示

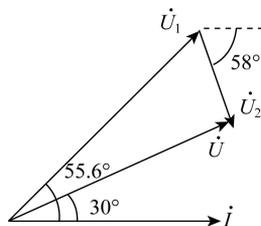


图 2-34 例 2-12 相量图

## 2.6.2 阻抗的并联

图 2-35 (a) 是两个阻抗并联的电路。根据基尔霍夫电流定律可写出它的相量表示式

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} = \dot{U} \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \quad (2-35)$$

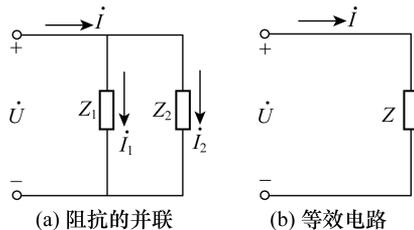


图 2-35 阻抗并联电路图

两个并联的阻抗也可用一个等效阻抗  $Z$  来代替。根据图 2-35 (b) 所示的等效电路可写出

$$i = \frac{\dot{U}}{Z} \quad (2-36)$$

比较上列两式，则得

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (2-37)$$

因为一般  $i \neq i_1 + i_2$ ，所以  $\frac{1}{|Z|} \neq \frac{1}{|Z_1|} + \frac{1}{|Z_2|}$

由此可见，只有等效阻抗的倒数才等于各个并联阻抗的倒数之和，在一般情况下写成

$$\frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_k} \quad (2-38)$$

**例 2-13** 图 2-36 所示为有两个阻抗  $Z_1 = 3 + j4\Omega$ ； $Z_2 = 8 - j6\Omega$  它们并连接在  $\dot{U} = 220 \angle 0^\circ \text{V}$  的电源上；求： $i_1$ 、 $i_2$  和  $i$  并作相量图。

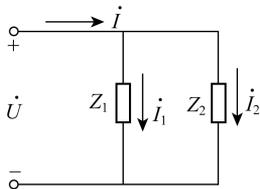


图 2-36 例 2-13 电路图

**解：**这是两个阻抗并联的情况， $Z_1 = 3 + j4\Omega = 5 \angle 53^\circ$ ， $Z_2 = 8 - j6\Omega = 10 \angle -37^\circ$ 。  
所以

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5 \angle 53^\circ \times 10 \angle -37^\circ}{3 + j4 + 8 - j6} = \frac{50 \angle 16^\circ}{11.8 \angle -10.5^\circ} = 4.47 \angle 26.5^\circ \Omega$$

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5 \angle 53^\circ} = 44 \angle -53^\circ \text{A}, \quad i_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle -37^\circ} = 22 \angle 37^\circ \text{A}$$

$$i = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{4.47 \angle 26.5^\circ} = 49.2 \angle -26.5^\circ \text{A}$$

相量图如图 2-37 所示：

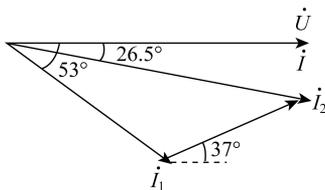


图 2-37 例 2-13 相量图

## 2.7 正弦交流电路中的功率

### 2.7.1 有功分量和无功分量

#### 1. 电压的有功分量和无功分量

对于图 2-38 (a) 所示的无源二端网络, 定义出关联参考方向下的复阻抗为

$$Z = R + jX$$

则  $\dot{U} = Z\dot{I} = (R + jX)\dot{I} = R\dot{I} + jX\dot{I} = \dot{U}_a + \dot{U}_r$

相量图如图 2-38 (b) 所示。与  $\dot{I}$  同相的  $\dot{U}_a$  叫做电压的有功分量, 其模  $U_a = U \cos\varphi$  就是二端网络等效电阻  $R$  上的电压, 它与电流的乘积  $U_a I = UI \cos\varphi = P$  就是网络吸收的有功功率。另一个与  $\dot{I}$  相差  $90^\circ$  的  $\dot{U}_r$  叫做电压的无功分量; 其模  $U_r = U \sin\varphi$  就是网络的等效电抗  $X$  上的电压, 它与电流的乘积  $U_r I = UI \sin\varphi$  就是网络吸收的无功功率。

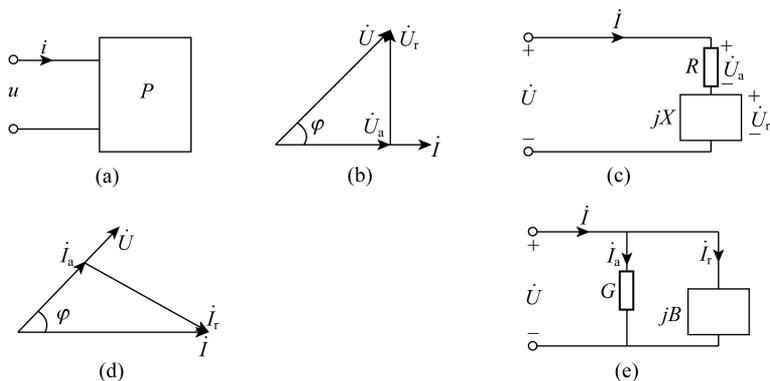


图 2-38 电压电流相量的分解

#### 2. 电流的有功分量和无功分量

图 2-38 (a) 所示的无源网络, 还可定义出关联参考方向下的导纳 (导纳是阻抗的倒数) 为

$$Y = G + jB, \text{ 则 } \dot{I} = Y\dot{U} = (G + jB)\dot{U} = G\dot{U} + jB\dot{U} = \dot{I}_a + \dot{I}_r$$

相量图如图 2-38 (d) 所示。与  $\dot{U}$  同相的  $\dot{I}_a$  叫做电流的有功分量, 它就是流经二端网络等效电导的电流, 其模为  $I_a = I \cos\varphi'$ , 它与电压的乘积  $UI_a = UI \cos\varphi'$  就是网络吸收的有功功率。另一个与  $\dot{U}$  相差  $90^\circ$  的  $\dot{I}_r$  叫做电流的无功分量, 是流经网络等效电纳  $B$  的电流, 其模与电压的乘积  $UI_r = UI \sin\varphi' = Q$  就是网络吸收的无功功率。

### 2.7.2 有功功率、无功功率、视在功率

由前面的分析可知,二端网络端口电压、电流有效值分别为  $U$ 、 $I$ , 关联参考方向下相位差为  $\varphi$  时, 吸收的有功功率, 即平均功率如式 (2-39) 所示:

$$P = UI\cos\varphi \quad (2-39)$$

吸收的无功功率, 即交换能量的最大速率如式 (2-40) 所示:

$$Q = UI\sin\varphi \quad (2-40)$$

$\varphi$  值有正有负, 所以  $Q$  是可正可负的代数量。在电压、电流关联考方向下, 按式 (2-40) 计算, 感性的无源二端网络吸收的无功功率为正值。容性的无源二端网络吸收的无功功率为负值。正弦电路中的平均功率一般不等于电压、电流有效值之积。这个乘积  $UI$  表面上看起来虽然具有功率的形式, 但它既不代表有功功率, 也不代表无功功率。我们把它称为网络的视在功率如式 (2-41) 所示, 即

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (2-41)$$

$S$  表示在电压  $U$  和电流  $I$  作用下, 电源可能提供的最大功率。为了与平均功率相区别, 它的单位不用瓦, 而用伏·安 ( $V \cdot A$ ), 常用的单位还有千伏·安 ( $kV \cdot A$ )。式 (2-41) 中的  $P$ 、 $Q$ 、 $S$  可组成一个直角三角形, 它与电压三角形相似称其为功率三角形, 如图 2-39 所示。

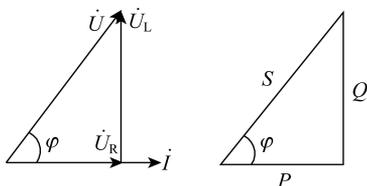


图 2-39 功率三角形

### 2.7.3 功率因数的提高

大家都已知道, 直流电路的功率等于电流与电压的乘积, 但交流电路则不然。在计算交流电路的平均功率时还要考虑电压与电流间的相位差  $\varphi$ , 即

$$P = UI\cos\varphi$$

上式中的  $\cos\varphi$  是电路的功率因数。在前面已讲过, 电压与电流间的相位差或电路的功率因数决定于电路 (负载的参数)。只有在电阻负载 (例如白炽灯、电阻炉等) 的情况下, 电压和电流才同相, 其功率因数为 1。对其它负载来说, 其功率因数均介于 0 和 1 之间。

#### 1. 功率因数的定义

式 (2-39) 中决定有功功率大小的参数  $\cos\varphi$  称功率因数, 用  $\lambda$  表示, 如式 (2-42) 所示:

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{S} \quad (2-42)$$

功率因数的大小取决于电压与电流的相位差, 故把  $\varphi$  角也称为功率因数角。

#### 2. 功率因数的意义

对于电力系统中的供电部分, 提供电能的发电机是按要求的额定电压和额定电流设计的, 发电机长期运行中, 电压和电流都不能超过额定值, 否则会缩短其使用寿命, 甚至损

坏发电机。由于发电机是通过额定电流与额定电压之积定额的，这意味着当其接入负载为电阻时，理论上发电机得到完全的利用，因为  $P=UI\cos\varphi$  中的  $\cos\varphi=1$ ；但是当负载为感性或容性时， $\cos\varphi<1$ ，发电机就得不到充分利用。为了最大程度利用发电机的容量，就必须提高其功率因数。

对于电力系统中的输电部分，输电线上的损耗： $\Delta P=I^2R$ ，负载吸收的平均功率： $P=UI\cos\varphi$ ，因为  $I=\frac{P}{U\cos\varphi}$ ，所以可以看出，在  $U$  和  $P$  都不变的情况下，提高功率因数  $\cos\varphi$  会降低输电线上的功率损耗！

功率因数不高，根本原因就是由于电感性负载的存在。例如生产中最常用的异步电动机在额定负载时的功率因数约为 0.7~0.9 左右，如果在轻载时其功率因数就更低。其他如工频炉、电焊变压器以及日光灯等负载的功率因数也都是较低的。电感性负载的功率因数之所以小于 1，是由于负载本身需要一定的无功功率。从技术经济观点出发，怎样解决这个矛盾，也就是如何才能减少电源与负载之间能量的交换，而又使电感性负载能取得所需的无功功率，这就是我们所提出的要提高功率因数的实际意义。

按照用电规则，高压供电的工业企业的平均功率因数不低于 0.95，其他单位不低于 0.9。

功率因数是电力系统很重要的经济指标。它关系到电源设备能否充分利用。为提高电源设备的利用率，减小线路压降及功率损耗，应设法提高功率因数。

### 3. 提高功率因数的方法

提高感性负载功率因数的常用方法之一是在其两端并联电容器。感性负载并联电容器后，它们之间相互补偿，进行一部分能量交换，减少了电源和负载间的能量交换，这时电感性负载所需的无功功率，大部分或全部就地供给（由电容器供给），就是说能量的互换现在主要或完全发生在电感性负载与电容器之间。

感性负载提高功率因数的原理可用图 2-40 来说明。由相量图可见，并联电容器以后线路电流也减小了（电流相量相加），因而减小了功率损耗。

应该注意，并联电容器以后有功功率没有改变，因为电容器是不消耗电能的。电容器补偿感性负载所需无功功率，提高了电路的功率因数。

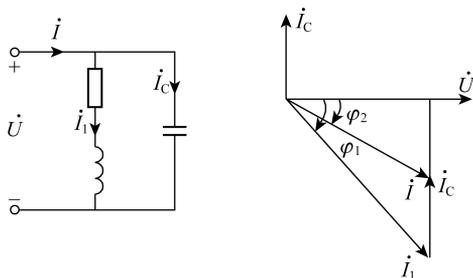


图 2-40 提高功率因数的原理

## 2.8 正弦交流电路的谐振

在具有电感和电容的电路中，电路中的电压和电流的相位一般是不同的。若调节电路中的  $L$ 、 $C$  或改变电源的频率，使电路中的电压和电流达到同相位，这时电路中就产生了谐振现象。处于谐振状态的电路，称为谐振电路。此时电路与电源之间不再有能量的双向

交换，电路呈电阻性。

谐振电路在电子技术中应用很广。例如收音机、振荡器等。常见的谐振电路有串联谐振和并联谐振。研究谐振的目的，就是一方面在生产上充分利用谐振的特点（如在无线电工程、电子测量技术等许多电路中应用）。另一方面又要预防它所产生的危害。

## 2.8.1 RLC 串联谐振

### 1. 谐振条件和谐振频率

在  $R$ 、 $L$ 、 $C$  串联的电路中，当  $X_L = X_C$  时，电路中的电流和总电压同相位，如图2-41所示，这时电路中就会产生谐振现象。

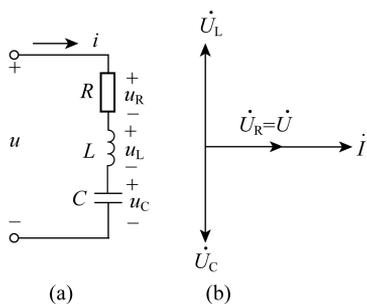


图 2-41  $R$ 、 $L$ 、 $C$  串联时的电路和相量图

因此， $X_L = X_C$  即为电路产生谐振的条件。根据

$$2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

可得谐振时的频率

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2-43)$$

由公式(2-43)可知，串联电路发生谐振时的频率  $f_0$  仅由电路本身的参数  $L$  和  $C$  确定，因此  $f_0$  又称为电路的固有频率。若电路的  $L$ 、 $C$  为一定值，则电路的固有频率为一定值。当调节电源的频率使它和电路的固有频率相等时，则满足  $X_L = X_C$  的条件，电路便发生谐振。反之，若电源频率为一定值，则改变电路的  $L$ 、 $C$ ，即改变电路的固有频率，使二者达到相等，也能使电路发生谐振。

### 2. 串联谐振的特点

(1) 阻抗最小

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$

由电路的阻抗在  $X_L = X_C$  时，串联谐振的阻抗  $|Z| = R$ 。这时电路的阻抗为最小。

(2) 电流最大

$$I = I_0 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R}$$

电路的电流在  $X_L = X_C$  时, 这时电路的电流  $I = I_0 = \frac{U}{R}$  为最大。

(3)  $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$  同相

电路呈电阻性, 能量全部被电阻消耗,  $Q_L$  和  $Q_C$  相互补偿。即电源与电路之间不发生能量互换。

(4) 电压关系

电阻电压:  $U_R = I_0 R = U$

电容、电感电压:  $\dot{U}_L = -\dot{U}_C$

$$U_L = IX_L = U_C = IX_C$$

$$\text{令} \quad Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (2-44)$$

因此  $U_L = U_C = QU$

上式中  $\frac{\omega_0 L}{R}$  或  $\frac{1}{\omega_0 RC}$  为  $U_L$  和  $U$  或  $U_C$  和  $U$  的比值。这个比值称为谐振回路的品质因数, 用  $Q$  表示。

当  $R \leq X_L$  或  $X_C$  时, 即谐振回路的品质因数很高时, 电感、电容上的电压可以比总电压高很多倍。由于串联谐振会在电感、电容上引起高电压, 所以串联谐振又称为电压谐振。

电压谐振产生的高电压在电信工程上是很有利的, 因为外来的无线电信号很微弱, 通过电压谐振就可把信号电压上升到几十倍甚至几百倍。但电压谐振也有其不利的一面, 例如在电力系统中有时会把电容器和电感线圈的绝缘击穿, 造成设备损坏事故。为此, 在电力系统中应尽力避免产生电压谐振。

### 3. 串联谐振电路的选频特性

根据电流  $I$  的公式, 作出  $I$  随  $f$  变化的曲线, 称为电流的频率响应曲线, 如图 2-42 所示。由图看出, 电流频率  $f$  偏离谐振时的频率  $f_0$  以后, 电流  $I$  就从谐振时的最大值  $I_0$  降下来, 下降的快慢则取决于电流频率响应曲线的形状。如果电流频率响应曲线很尖锐, 则电流  $I$  的下降就很快。说明只有在谐振频率附近, 电路中的电流才能有较大的值, 而其它频率的电流则很小。这种能把谐振频率附近的电流选择出来的特性就称为电流的选频特性, 又称为电路的选择性。

在  $RLC$  串联谐振电路中, 阻抗随频率的变化而改变, 在外加电压不变的情况下, 电流将随频率变化, 这一曲线称为电流谐振曲线。

工程上规定, 当电路的电流为 0.707 倍  $I_0$  ( $I = 0.707I_0$ ) 时, 谐振曲线对应的上、下限频率之间的范围称为电路的通频带。

$$f_w = f_2 - f_1$$

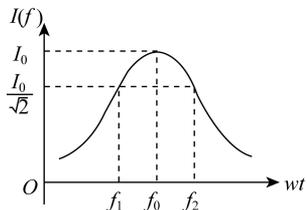


图 2-42 电流的频率响应曲线

电流的频率响应曲线的形状和谐振回路的品质因数  $Q$  有很大关系。可用两个电阻相同而  $Q$  值不同的谐振回路来对比。在偏离谐振频率后的同一频率下，由于  $Q$  值高的谐振回路的感抗和容抗比  $Q$  值低的谐振回路要大，所以  $Q$  值高的谐振回路取用的电流较小。可见， $Q$  值越高，谐振回路在偏离谐振频率后电流的下降就越快，电流频率响应曲线就越尖锐。图表示两种不同  $Q$  值的电流频率响应曲线。依照规定，当电流下降到最大有效值  $I_0$  的  $1/\sqrt{2} \approx 0.707$  倍时，所包含的一段频率范围称为电路的通频带宽度，即  $\Delta f = f_2 - f_1$ 。

如果  $Q$  值较高，则谐振电路的通频带宽度较小，电路的选择性就较好。应注意，谐振电路的通频带宽度并不一定是愈小愈好，它应符合所需要传输的信号对通频带宽度的要求。

**例 2-14** 例在电阻、电感、电容串联谐振电路中， $L = 0.05\text{mH}$ ， $C = 200\text{pF}$ ，品质因数  $Q = 100$ ，交流电压的有效值  $U = 1\text{mV}$ 。试求：(1) 电路的谐振频率  $f_0$ ；(2) 谐振时电路中的电流  $I$ ；(3) 电容上的电压  $U_C$ 。

$$\text{解：} f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times \sqrt{5 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^{-10}}} = 1.59\text{MHz}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 100 \quad R = 5\Omega$$

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{1 \times 10^{-3}}{5} \text{A} = 0.2\text{mA}$$

$$U_C = QU = 100 \times 10^{-3} \text{V} = 0.1\text{V}$$

## 2.8.2 RLC 并联谐振

### 1. RLC 并联谐振

图 2-43 为 RLC 并联谐振，电路的总电流相量为  $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$  RLC 并联谐振条件

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jX_L} + \frac{\dot{U}}{-jX_C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{LC}$$

RLC 并联谐振电路的特点：

$$I_0 = \frac{U}{R}$$

并联谐振电路的总阻抗最大。

$$|Z| = R$$

并联谐振电路的总电流最小。

$$I_0 = \frac{U}{R}$$

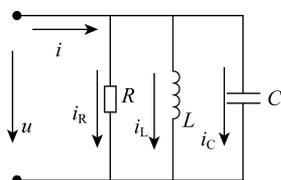


图 2-43 并联谐振电路

$$Q = \frac{I_L}{I_0} = \frac{I_C}{I_0} = \frac{R}{\omega L} = R\omega C = RC \frac{1}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

可见,  $RLC$  串联谐振电路品质因素  $Q$  与  $RLC$  并联谐振电路的  $Q$  互为倒数。这是因为  $RLC$  串联电路为分压电路, 每个元件分压与元件阻抗成正比, 而  $RLC$  并联电路为分流电路, 每个元件分流与元件阻抗成反比。

$RLC$  并联谐振时, 回路端电压与总电流同相。电感支路和电容支路的电流远大于端口总电流, 且大小近似相等、相位相反, 均为总电流的  $Q$  倍。所以并联谐振也称电流谐振。

### 3. $RL$ 与 $C$ 并联谐振电路

$RL$  与  $C$  并联谐振电路如图 2-44 所示, 导纳为

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right) \end{aligned}$$

所以, 谐振条件

$$\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

谐振频率

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$$

下面对  $R$ 、 $L$  与  $C$  并联谐振电路进行进一步分析。

#### (1) 谐振条件和谐振频率

图 2-45 (a) 为既有电阻  $R$  又有电感  $L$  的线圈和电容器  $C$  并联的电路。如果线圈支路电流的无功分量  $I_{1V}$  和电容支路的电流  $I_C$  大小相等相位相反, 则电路的电压和总电流便达到同相位, 如图 2-45 (b) 所示。这时电路中就会产生谐振现象。所以, 并联谐振的条件是:  $\dot{I}_C + \dot{I}_{1V} = 0$ , 即电路中总电流的无功分量等于零。

图中的  $I_{1V} = I_1 \sin\varphi_1$ , 而  $\sin\varphi_1 = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$ , 故

$$I_{1V} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cdot \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} U$$

电容支路中的电流  $I_C = \frac{U}{X_C}$ 。

实际上, 一般都采用损耗很小的谐振回路。所以, 线圈的电阻远小于它的感抗, 即谐振回路具有较高的  $Q$  值。所以  $\varphi_1 \approx 90^\circ$ ,  $I_{1V} \approx \frac{U}{X_L}$ 。此时, 并联谐振的条件可认为是  $X_L \approx$

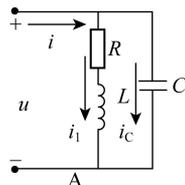


图 2-44  $RL$  与  $C$  并联谐振电路

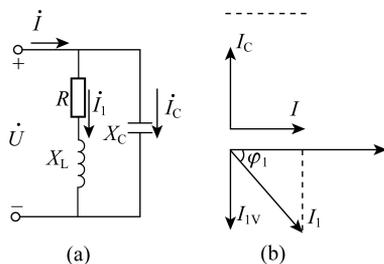


图 2-45  $RL$  与  $C$  并联谐振电路

$X_C$ , 谐振频率

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(2) 并联谐振的特点

① 并联谐振时, 线圈支路、电容支路中的电流可以比总电流大许多倍。

因为谐振时线圈支路和电容支路的无功电流互相补偿, 所以电路的电压和总电流同相位, 电路为纯电阻性质。此时总电流为

$$I_0 = I_1 \cos\varphi_1$$

$$\text{把上式改写为 } \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{\cos\varphi_1} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{R}$$

当  $R \ll X_L$  时,  $\sqrt{R^2 + X_L^2} \approx X_L$ , 所以

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{X_L}{R} = Q$$

这说明, 在  $Q$  值较高的情况下, 并联谐振回路中的  $I_1$ 、 $I_C$  大约是总电流  $I_0$  的  $Q$  倍。因此并联谐振又称为电流谐振。

由于并联谐振时, 可以在  $L$  和  $C$  上引起较大的电流, 实际上这些电流为无功电流, 在线圈与电容器组成的回路中往返流动, 形成电磁振荡而很少流回电源所致。电流谐振时,  $i_L$  和  $i_C$  之间的相位差接近于  $180^\circ$ , 当  $i_L$  正方向增大时,  $i_C$  几乎是反方向增大。因此, 在谐振回路中有一个环流  $i$  存在, 如图 2-46 所示, 这个环流是由于电容  $C$  和电感  $L$  之间进行电磁场能量的互相交换而引起的振荡电流。在振荡过程中, 时而由线圈的感应电动势对电容器充电, 把线圈中的磁场能量释放出来, 转变为电容器极板间的电场能量储存在电容器之中; 时而电容器又对线圈放电, 再把电场能量转变为磁场能量。因此在  $L$  和  $C$  之间不断地进行能量的互相交换, 电源只是补偿在振荡过程中回路的电阻所消耗的能量, 而这个能量是很小的。为此, 在并联谐振的电路中, 总电流  $I_0$  可以小于分支电流  $I_1$  和  $I_C$ 。图 2-47 显示了总电流和阻抗随频率  $f$  的变化情况。

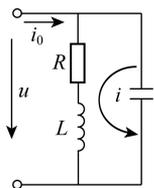


图 2-46 谐振回路中的振荡电流

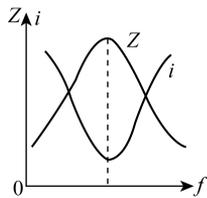


图 2-47 总电流和阻抗与频率  $f$  的关系曲线

② 并联谐振时回路的总电流  $I_0$  为最小, 并且与电压同相。故回路的等效阻抗  $|Z_0|$  为最大, 其值为

$$|Z_0| = \frac{U}{I_0} = \frac{U}{I_1 \cos\varphi_1} = \frac{R^2 + X_L^2}{R} \approx QX_L = QX_C$$

这说明, 在  $Q$  值较高时, 谐振回路的等效阻抗约为线圈的感抗或容抗的  $Q$  倍。偏离

谐振频率  $f_0$ ，则  $|Z_0|$  将迅速下降。

(3) 并联谐振时电压的特点

如图 2-48，谐振时，并联各支路与总电压均相等，并且与总电流  $\dot{i}$  同相，但是总电流  $\dot{i}$  比  $\dot{I}_C$  滞后  $90^\circ$ ，比  $\dot{I}_L$  超前近乎  $90^\circ$ 。电压随频率的变化如图 2-48 所示。在谐振时， $f=f_0$ ，该电路呈现出最大的阻抗，从而电路两端电压也最大；而对其他频率的信号，阻抗小，电路两端电压也小。因此可以在并联谐振电路的两端把所需频率的信号选出来，实现了“选频”的作用。选频性能的好坏决定于品质因素  $Q$ 。

(4) 并联谐振时功率的特点

并联谐振时， $\dot{i}$  与  $\dot{U}$  同相， $\varphi=0^\circ$ ，于是有如下关系：

$$\cos\varphi=1, P=UI\cos\varphi=UI=S, Q=UI\sin\varphi=0$$

可见，谐振时只从电源吸收少量电能维持电感与电容间的电磁振荡（补充电磁振荡中的能耗），而与电源间没有其他能量的交换。

并联谐振在无线电技术和工业电子技术中应用很广泛。在电子工程中应用并联谐振阻抗高的特点来选择信号或者消除干扰。

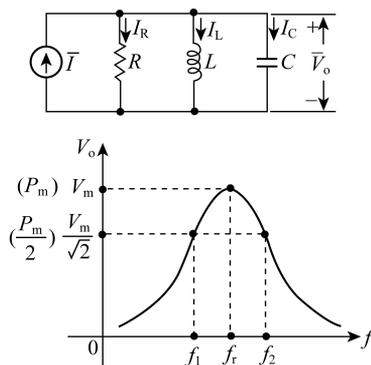


图 2-48 并联谐振电路的端电压随频率的变化曲线

## 本章小结

### 1. 正弦量的三要素及其表示

以正弦电流为例，在确定的参考方向下，它的解析式为

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2} I \sin(2\pi f t + \varphi_i)$$

其中振幅值  $I_m$  值（有效值  $I$ ）、角频率  $\omega$ （或频率  $f$  及周期  $T$ ）、初相  $\varphi$  是决定正弦量的三要素。它们分别表示正弦量变化的范围，变化的快慢及其初始状态。根据正弦量的三要素，它也可以用波形图来表示。正弦量的有效值相量  $I = \angle \varphi_i$  相量只体现了三要素的两个要素。

### 2. 元件约束（伏安特性）和互联约束（KCL 和 KVL）的相量式

(1) 在关联参考方向下：

$$\begin{aligned} \dot{U}_R &= R\dot{I}_R \quad \text{或} \quad \dot{I}_R = G\dot{U}_R \\ \dot{U}_L &= jX_L\dot{I}_L \quad \text{或} \quad \dot{I}_L = -jB_L\dot{U}_L \\ \dot{U}_C &= -jX_C\dot{I}_C \quad \text{或} \quad \dot{I}_C = jB_C\dot{U}_C \\ \dot{U} &= Z\dot{I} \quad \dot{I} = Y\dot{U} \quad Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = |Z| \angle \varphi \end{aligned}$$

$$(2) \text{ KCL: } \sum \dot{I}_i = 0 \quad \text{KVL: } \sum \dot{U}_i = 0$$

### 3. 复阻抗与复导纳

无源二端网络或元件，在电压电流关联参考方向下，二者关系的相量形式为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = |Z| \angle \varphi \quad Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = |Y| \angle \varphi'$$

### 4. 相量法

将正弦电路的激励和响应用相量表示，每一个无源的二端网络（包含无源的二端元件）用阻抗或导纳表示，那么直流电路的分析计算方法可以类推到正弦交流电路。首先要把原来的正弦电路参数的模型用相量模型表示。然后选用合适的方法分析计算。

### 5. 功率

$$P = U_R I = UI \cos \varphi \quad Q = U_X I = UI \sin \varphi \quad S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

功率因数  $\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi$ ，感性负载并联电容器可提高功率因数。负载获得最大功率的条件是阻抗的共轭匹配和阻抗值的模匹配。

### 6. 谐振

电感线圈与电容器串联和并联组成的谐振电路，固有角频率  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 。

串联谐振时，阻抗最小， $Z_0 = R$ ， $U_L = U_C = QU$ ，当品质因数  $Q \gg 1$  时， $U_L = U_C \gg U_{\text{总}}$ ，也称为电压谐振。

并联谐振时，网络阻抗最大或接近最大， $Z_0 = \frac{L}{RC} = Q^2 R$ ；当品质因数  $Q \gg 1$  时， $I_C = I_L = QI_{\text{总}} \gg I_{\text{总}}$ ，也称为电流谐振。

## 本章习题

2-1 已知  $u(t) = 220\sqrt{2} \sin(314t - 135^\circ) \text{V}$ ，求有效值  $U$ 、周期  $T$ 、初相位  $\varphi$ ，当  $t = 0.01 \text{s}$  时， $u(t)$ 。

2-2 已知电流和电压的瞬时值函数式为  $u = 317 \sin(\omega t - 160^\circ) \text{V}$ ， $i_1 = 10 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{A}$ ， $i_2 = 4 \sin(\omega t + 70^\circ) \text{A}$ 。试在保持相位差不变的条件下，将电压的初相角改为零度，重新写出它们的瞬时值函数式。

2-3 一个正弦电流的初相位  $\varphi = 15^\circ$ ， $t = \frac{T}{4}$  时， $i(t) = 0.5 \text{A}$ ，试求该电流的有效值  $I$ 。

2-4 确定下列各组电压、电流的相位差。

$$(1) u_1 = 220\sqrt{2} \sin(314t + \pi/3) \text{V} \quad u_2 = 380\sqrt{2} \cos(314t) \text{V}$$

$$(2) i_1 = 10\sqrt{2} \cos(50\pi t + 30^\circ) \text{A} \quad i_2 = 7.07 \sin(50\pi t + 30^\circ) \text{A}$$

$$(3) u = 110\sqrt{2}\sin(100t + \pi)\text{V} \quad i = 5\sin(100t - \pi/4)\text{A}$$

2-5 已知  $i_1 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)\text{A}$ ,  $i_2 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ)\text{A}$ , 求: (1)  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ ; (2)  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2$ ; (3)  $i_1 + i_2$ ; (4) 作  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2$  的相量图。

2-6 试将下列各相量用对应的时间函数(角频率  $\omega$ ) 来表示。

$$\dot{i} = 10 \angle 30^\circ \text{A}; \quad j\dot{i}; \quad \frac{\dot{i}}{j}$$

2-7 已知  $u_1 = 220\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ)\text{V}$ ,  $u_2 = 220\sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ)\text{V}$ , 求  $u_1$  和  $u_2$  对应的相量  $\dot{U}_1$  和  $\dot{U}_2$ , 作出  $\dot{U}_1$  和  $\dot{U}_2$  的相量图, 并求:  $u_1 + u_2$ 、 $u_1 - u_2$ 。

2-8 在  $5\Omega$  电阻的两端加上电压  $u = 310\sin 314t\text{V}$ , 求:

- (1) 流过电阻的电流有效值;
- (2) 电流瞬时值;
- (3) 有功功率;
- (4) 画电流和电压的相量图。

2-9 有一电感  $L = 0.626\text{H}$ , 加正弦交流电压有效值  $U = 220\text{V}$ ,  $f = 50\text{Hz}$ , 求:

- (1) 电感中的电流  $I_m$ 、 $I$  和  $i$ ;
- (2) 无功功率  $Q_L$ ;
- (3) 画电流、电压的相量图。

2-10 有一电容器  $C = 31.8\mu\text{F}$ , 接  $u = 220\sqrt{2}\sin(314t - 45^\circ)\text{V}$ , 求:

- (1) 电容器电路中电流  $i$ 、 $I_m$ 、 $\dot{I}$ ;
- (2) 电容器上的无功功率  $Q_c$ ;
- (3) 作电流和电压的相量图。

2-11 已知在  $10\Omega$  的电阻上通过的电流为  $i_1 = 5\sin\left(314t - \frac{\pi}{6}\right)\text{A}$ , 试求电阻上电压的有效值, 并求电阻消耗的功率为多少?

2-12 用电压表测量图 2-49 串联电路中各元件的电压, 画出测量电路图, 并由已知的各元件电压值, 求电路的端电压。

(1) 已知图 2-49 (a) 中  $|\dot{U}_R| = 40\text{V}$ ,  $|\dot{U}_L| = 60\text{V}$ ,  $|\dot{U}_C| = 50\text{V}$ ;

(2) 已知图 2-49 (b) 中  $|\dot{U}_R| = 50\text{V}$ ,  $|\dot{U}_L| = 100\text{V}$ 。

2-13 在  $RLC$  串联电路中, 已知  $R = 20\Omega$ ,  $L = 0.1\text{H}$ ,  $C = 50\mu\text{F}$ 。当信号频率  $f = 1000\text{Hz}$  时, 试写出其复数阻抗的表达式, 此时阻抗是感性的还是容性的?

2-14 把一个电阻为  $6\Omega$ 、电容为  $120\mu\text{F}$  的电容串接在  $u = 220\sqrt{2}\sin(314t + \pi/2)\text{V}$  的电源上, 求电路的阻抗、电流、有功功率、无功功率及视在功率。

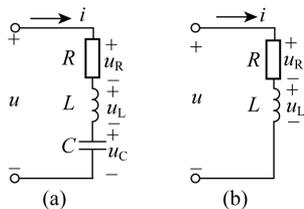


图 2-49