第 3 章　集合的基本概念和运算

集合论是现代数学的基础。17 世纪，数学中出现了一门新的分支——微积分。在之后的一二百年中这一新学科飞速发展。19 世纪初，许多迫切问题得到解决后，数学家们开始探寻微积分的基础，从而进行了有关数据集的研究。

德国数学家康托尔开始探讨前人从未碰过的实数点集，这是集合论研究的开端。1874 年康托尔提出“集合”的概念，后来又提出了关于基数、序数和良序集等理论，奠定了集合论的基础。

在 1900 年前后出现了罗素悖论，如“理发师说只给不能给自己理发的人理发”，使集合论的发展陷入困惑；1904～1908 年，策墨罗提出第一个集合论的公理系统，使集合论的矛盾得以解决，并逐步形成了公理化集合论和抽象集合论。

集合论是计算机科学与技术学科的重要基础，它在很多分支学科中有重要应用：

(1) 它已经成为构造性数学的重要基础。目前，集合论已经成为数理逻辑、抽象代数、图论等构造性数学的重要基础。

(2) 它已经成为计算数学理论的重要基础。目前，集合论在计算理论、模型论、形式语言与自动机理论、形式语义学中有重要应用。

(3) 它已经成为软件理论与技术的重要基础。目前，集合论在数据结构、编译原理、数据库原理中得到了重要应用。

3.1　集合的基本概念和表示法

3.1.1　集合及其表示

集合是一个不能精确定义的基本概念。直观地说，把一些事物汇集到一起组成的一个整体就叫作集合，而这些事物就是这个集合的元素。例如：

26 个英文小写字母的集合；

所有自然数的集合；

……

集合通常用大写英文字母来标记，例如自然数集合 **N**，整数集合 **Z**，有理数集合 **Q**，实数集合 **R**，复数集合 **C** 等。集合的元素通常用小写英文字母表示。

表示一个集合的方法有两种：列元素法和谓词表示法。前一种方法也叫枚举法，就是列出集合的所有元素，元素之间用逗号隔开，并把它们用花括号括起来。例如：$A=\{a,$

b，c，…，z}。

谓词表示法也称描述法，是用谓词来描述集合中元素的属性，例如：

$$B=\{x \mid x\in \mathbf{R} \wedge x+1=0\}$$

表示方程 $x+1=0$ 的实数解集。很多集合都可以有两种表示方法。

本章所研究的同一集合中，元素是互不相同的，并且集合的元素是无序的。

3.1.2　集合间的关系

元素与集合之间是属于($\in$)和不属于($\notin$)的关系。两个集合间的关系有两种——包含关系和相等关系。

定义 3.1.1　设 A、B 为集合，如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，也可以说 A 包含于 B，或者 B 包含 A，这种关系写作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$；如果 A 不是 B 的子集，即在 A 中至少有一个元素不属于 B 时，称 B 不包含 A，记作 $B\not\supseteq A$ 或 $A\not\subseteq B$。包含的符号化表示为：

$$B\subseteq A\Leftrightarrow \forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$$

定义 3.1.2　设 A、B 为集合，如果两个集合 A 和 B 的元素完全相同，则称这两个集合相等，记作 $A=B$。相等的符号化表示为：

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$

如果 A 和 B 不相等，则记作 $A\neq B$。

例如，$A=\{1，2，3，4\}$，$B=\{3，2，4，1\}$，显然有 $A=B$。

定理 3.1.1　集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

该定理经常用来证明两个集合相等。

定义 3.1.3　如果集合 A 是集合 B 的子集，但 A 和 B 不相等，也就是说在 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

例如：集合 $A=\{1，2\}$，$B=\{1，2，3\}$，那么 A 是 B 的真子集。

定义 3.1.4　不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。

定理 3.1.2　空集是任何集合的子集，且空集是唯一的。

定义 3.1.5　若集合 U 包含我们所讨论的每一个集合，则称 U 是所讨论问题的完全集，简称全集。

全集是一个相对的概念，我们研究的对象不同，全集也不同。

3.1.3　幂集

定义 3.1.6　设 A 是有限集，由 A 的所有子集作为元素而构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$，即 $P(A)=\{X \mid X\subseteq A\}$。

例 3.1.1　设 $A=\{1，2，3\}$，求 A 的幂集。

解：$P(A)=\{\varnothing，\{1\}，\{2\}，\{3\}，\{1，2\}，\{1，3\}，\{2，3\}，\{1，2，3\}\}$

同样可以得到以下幂集：

$$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$$

$$P(\{\varnothing\})=\{\varnothing，\{\varnothing\}\}$$

$$P(\{1,\{2,3\}\})=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$$

定理 3.1.3　设 A 是包含 n 个元素的有限集，则 A 的幂集元素个数为 2^n。

证明：A 的所有 k 个元素组成的集合是从 n 个元素中取 k 个的组合数 C_n^k，由二项式定理知，$P(A)$元素个数为：

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$$

3.2　集合的基本运算

集合的运算，就是以集合为对象，按照确定的规则得到另外一些新集合的过程。给定集合 A、B，可以通过集合的交、并、差、补等运算产生新的集合。

3.2.1　集合的并与交

定义 3.2.1　设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$，则 $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$。

可以用文氏图表示集合之间的并运算。用平面上的矩形表示全集 U，用矩形内的圆表示 U 中的任一集合。图 3.2.1 中表示了集合 A 和集合 B 的并集，阴影部分就是 $A\cup B$。

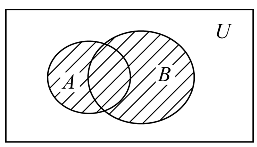

图 3.2.1　A 与 B 的并集

定义 3.2.2　设 A、B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d,e\}$，则 $A\cap B=\{b,c\}$。

集合的交运算的文氏图表示，如图 3.2.2 所示，其中阴影部分就是 $A\cap B$。

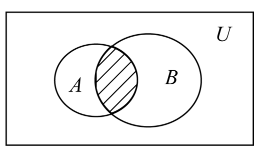

图 3.2.2　A 与 B 的交集

3.2.2　集合的差与补

定义 3.2.3　设 A、B 是两个集合，由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 B 关于 A 的补集(或相对补)，也称为集合 A 和 B 的差集，记为 $A-B$，即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b\}$，则 $A-B=\{c\}$。

集合的差运算的文氏图表示，如图 3.2.3 所示，其中阴影部分就是 $A-B$。

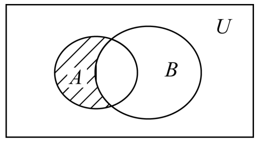

图 3.2.3 A 与 B 的差集

定义 3.2.4 设 U 是全集，A 是 U 的一个子集，称 $U-A$ 为 A 关于全集的补集，也叫作 A 的绝对补集，简称为补集，记作 $\sim A$，即

$$\sim A=U-A=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}$$

例如，$U=\{x \mid x$ 是计算机学院的学生$\}$，$A=\{x \mid x$ 是计算机学院的女学生$\}$，则 $\sim A=\{x \mid x$ 是计算机学院的男学生$\}$。

集合的补集的文氏图表示，如图 3.2.4 所示，其中阴影部分就是 $\sim A$。

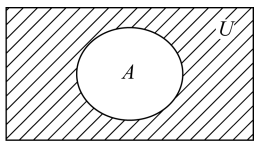

图 3.2.4 A 的补集

3.2.3 集合的对称差

定义 3.2.5 设 A、B 是两个集合，集合 A 和 B 的对称差记作 $A\oplus B$，它是一个这样的集合：其元素或属于 A，或属于 B，但不能既属于 A 又属于 B，即

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

例如，$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,c,e,f,g\}$，那么 $A\oplus B=\{b,e,d,f,g\}$，集合的对称差的文氏图表示，如图 3.2.5 所示，其中阴影部分就是 $A\oplus B$。

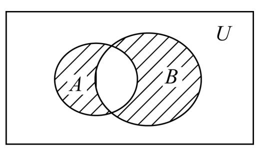

图 3.2.5 A 与 B 的对称差

3.3 集合恒等式

任何代数运算都满足一定的规律，集合的运算也不例外，满足以下运算规律，称为集合恒等式，其中的 A、B、C 代表任意集合，E 表示全集。

幂等律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

同一律：$A\cup\varnothing=A$，$A\cap E=A$；

零　律：$A\cup E=E$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

排中律：$A\cup\sim A=E$；

矛盾律：$A\cap\sim A=\varnothing$；

吸收律：$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$；

德·摩根律：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$

$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$

$\sim\varnothing=E$；$\sim E=\varnothing$；

双重否定律：$\sim(\sim A)=A$。

以上规律都可以用文氏图验证，也可以用集合运算的定义验证。

例 3.3.1　证明：$A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$。

证明： 任取 x，$x\in P(A)\Rightarrow x\subseteq A\Rightarrow x\subseteq B\Rightarrow x\in P(B)$；

任取 x，$x\in A\Rightarrow\{x\}\subseteq A\Rightarrow\{x\}\in P(A)\Rightarrow\{x\}\ P(B)\Rightarrow\{x\}\subseteq B\Rightarrow x\in B$。证毕。

例 3.3.2　证明：$A\cup(A\cap B)=A$(吸收律)。

证明：

方法一：

任取 x，$x\in A\cup(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B)\Leftrightarrow x\in A$。

方法二：

$A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$　　同一律

$=A\cap(E\cup B)$　　分配律

$=A\cap(B\cup E)$　　交换律

$=A\cap E$　　零律

$=A$　　同一律

3.4　集合中元素的计数

在实际问题中，我们经常需要研究有穷集合中元素的个数，尤其是集合交或者并运算后集合中元素的个数。

3.4.1　集合的基数

定义 3.4.1　有穷集合 A 中的元素个数，称为 A 的基数，记作 $\mathrm{card}A$，也可以记作 $|A|$。

例如：$A=\{a, b, c\}$，$\mathrm{card}A=|A|=3$

$B=\{x\mid x^2+1=0, x\in R\}$，$\mathrm{card}B=|B|=0$

本书中不讨论无穷集的基数。

我们经常借助文氏图来解决集合的基数问题。

例 3.4.1　求 1 到 1 000 之间(包含 1 和 1 000 在内)，既不能被 5 和 6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个?

解：根据题意，构造如下文氏图(图 3.4.1)，可知满足条件的数有 600 个。

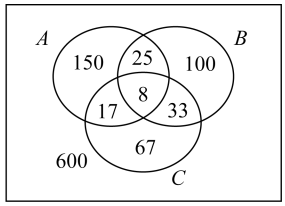

图 3.4.1

例 3.4.2　某公司有 24 名科技人员，每人至少会 1 门外语。具体掌握外语人数如下：英语：13；日语：5；德语：10；法语：9；英日：2；英德：4；英法：4；法德：4。会日语的不会法语、德语。

求：只会 1 种语言人数及会 3 种语言人数。

解：根据题意，构造如下文氏图(图 3.4.2)：

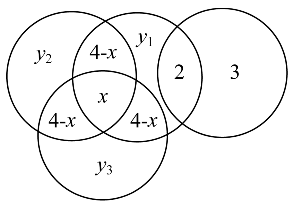

图 3.4.2

设只会英语、法语、德语的人数分别为 y_1，y_2，y_3，会 3 种语言的人数为 x，得到如下方程组：

$$x+2(4-x)+y_1+2=13$$
$$x+2(4-x)+y_2=10$$
$$x+2(4-x)+y_3=9$$
$$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$$

解得：$x=1$，$y_1=4$，$y_2=3$，$y_3=2$。

所以，只会 1 种语言的人数是 $4+3+2+3=12$ 人，会 3 种语言人数 1 人。

3.4.2　包含排斥原理

简单的问题可以用文氏图来解决，当集合数量多或者问题复杂时，文氏图有其局限性，下面介绍关于集合基数的重要定理——包含排斥原理。

定理 3.4.1　设 S 为有穷集，P_1，P_2，…，P_m是 m 种性质，A_i是 S 中具有性质 P_i的元素构成的子集，$i=1$，2，…，m。则 S 中不具有性质 P_1，P_2，…，P_m的元素数为：

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m = |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+\cdots+(-1)^m|A_1 \cap \cdots \cap A_m|$$

推论 1 在定理 3.4.1 的条件下，S 中至少具有性质 P_1，P_2，…，P_m 之一的元素个数为：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \sum_{i=1}^{m}|A_i| - \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant m}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1}|A_1 \cap \cdots \cap A_m|$$

推论 2 设 A、B 为有限集合，$|A|$、$|B|$ 为其基数，则

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

在例 3.4.1 中，可以用包含排斥原理方式来解，解法如下：

解： $S=\{x|x\in Z, 1\leqslant x\leqslant 1\ 000\}$

如下定义 S 的 3 个子集 A，B，C：

$$A=\{x|x\in S, 5|x\},$$
$$B=\{x|x\in S, 6|x\},$$
$$C=\{x|x\in S, 8|x\}$$

对上述子集计数：

$|S| = 1\ 000$

$|A| = \lfloor 1\ 000/5 \rfloor = 200$，$|B| = \lfloor 1\ 000/6 \rfloor = 166$，$|C| = \lfloor 1\ 000/8 \rfloor = 125$

$|A\cap B| = \lfloor 1\ 000/30 \rfloor = 33$，$|B\cap C| = \lfloor 1\ 000/40 \rfloor = 25$，$|B\cap C| = \lfloor 1\ 000/24 \rfloor = 41$

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1\ 000/120 \rfloor = 8$

代入公式有：

$N=1\ 000-(200+166+125)+(33+25+41)-8=600$

例 3.4.3 假设某班有 20 名学生，其中有 10 人英语成绩为优，有 8 人数学成绩为优，又知有 6 人英语和数学成绩都为优。问两门课都不为优的学生有几名？

解： 设英语成绩是优的学生组成的集合是 A，数学成绩是优的学生组成的集合是 B，因此两门课成绩都是优的学生组成的集合是 $A\cap B$。由题意可知：

$$|A| = 10$$
$$|B| = 8$$
$$|A\cap B| = 6$$

则由包含排斥原理可得：

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = 10+8-6=12。$$

所以，两门课都不是优的学生数为：$20-|A\cup B|=8$。

习题 3

1. A、B、C 为任意集合，证明：$A\subseteq C \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$。
2. A、B、C 为任意集合，证明：$A\cap C=B\cap C \wedge A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$。
3. 分别计算幂集 $P(A)$：

(1) $A=\{\{1\}, 1\}$；

(2) $A=P(\{1, 2\})$；

(3) $A=\{\{1，1\}，\{1，2\}，\{1，3\}\}$。

4. 设校足球队的球衣有 38 件，篮球队的球衣有 15 件，排球队的球衣有 20 件，3 队总人数为 58 人，3 人同时参加 3 队，请问同时参加 2 个队的队员有多少人？

5. 求在[1，300]整数中能被 3 或 5 或 7 整除的整数的个数。

6. 75 个儿童到公园游乐场，他们在那里可以骑旋转木马，坐滑行铁道，乘宇宙飞船，已知其中 20 人这 3 种东西都乘过，其中 55 人至少乘坐过其中的 2 种。若每样乘坐一次的费用是 0.5 元，公园游乐场总共收入 70 元，求有多少儿童乘坐过其中任何一种。