

第 3 章

离散傅里叶变换及其快速算法

【教学目的与要求】

1. 掌握周期序列离散傅里叶级数(DFS)变换的定义与性质;
2. 熟练掌握离散傅里叶变换(DFT)的物理意义及其与序列的傅里叶变换、 z 变换的关系;
3. 深入理解频域采样的有关理论;
4. 熟练掌握按时间抽选的基-2 FFT 和按频率抽选的基-2 FFT 的基本思想和方法;
5. 学会应用 MATLAB 实现 DFT、FFT, 对信号进行频谱分析。



学习导图

3.1 引言

序列的傅里叶变换和 z 变换都是时域离散信号与系统分析设计的重要数学工具, 但是这两种变换的结果都是连续函数, 无法应用计算机进行处理。由于数字计算机只能计算有限长离散序列, 因此有限长序列在数字信号处理中非常重要。为了便于数值处理, 时域离散、频域也离散的离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, 简称 DFT)与其快速算法(Fast Fourier Transform, FFT)得到广泛的应用, 在各种数字信号处理的算法中起着核心作用。

案例 FFT 变换方法在频谱分析仪中的应用。

图 3.1 所示频谱分析仪主要用于分析信号中所包含的频率成分, 也就是分析信号的频谱分布。频谱分析仪利用滤波、跟踪锁相或快速傅里叶变换等技术, 使用一个或多个微处理器进行控制、误差修正和数据处理。通过 FFT 方法计算 DFT, 得到信号的离散频谱, 再经平方运算获得信号的功率谱。

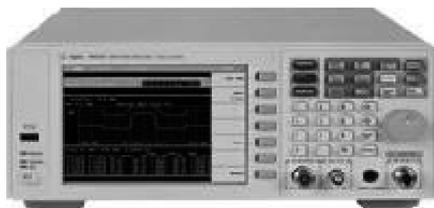


图 3.1 频谱分析仪

本章主要介绍离散傅里叶变换及其快速算法。

3.2 周期序列的傅里叶级数变换及其性质

下面先从周期性序列的离散傅里叶级数开始讨论,然后再讨论可作为周期函数一个周期的有限长序列的离散傅里叶变换。

3.2.1 周期序列的离散傅里叶级数

设 $\tilde{x}(n)$ 是一个周期为 N 的周期序列,即

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN), \quad r \text{ 为任意整数。}$$

周期序列是无限长序列,不是绝对可和的,所以不能用 z 变换表示,因为在任何 z 值下,其 z 变换都不收敛,即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| |z^{-n}| \rightarrow \infty$$

但是,正如连续时间周期函数可以用傅里叶级数表示一样,周期序列也可以用离散傅里叶级数来表示,该级数相当于成谐波关系的复指数序列(正弦型序列)的和。也就是说,复指数序列的频率是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的基频 $\left(\frac{2\pi}{N}\right)$ 的整数倍。这些复指数序列 $e_k(n)$ 的形式为

$$e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e_{k+rN}(n) \quad (3-1)$$

式(3-1)中, k, r 为整数。

由式(3-1)可见,复指数序列 $e_k(n)$ 对 k 呈现周期性,周期为 N 。也就是说,离散傅里叶级数的谐波成分只有 N 个独立分量,这是不同于连续傅里叶级数的地方(后者有无穷多个谐波成分)。因此,对于离散傅里叶级数,只需且只能取 $k=0$ 到 $N-1$ 的 N 个独立谐波分量就足以表示原来的信号,不然就会产生二义性。因而 $\tilde{x}(n)$ 可展成如下的离散傅里叶级数,即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3-2)$$

式(3-2)中,其求和号 \sum 前所乘的系数 $1/N$ 是习惯上已经采用的常数, $\tilde{X}(k)$ 是 k 次谐波的系数。下面求解系数 $\tilde{X}(k)$, 这要利用复正弦序列的正交特性,即

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-3)$$



式(3-2)两端同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$ ，然后在 $n=0$ 到 $N-1$ 的一个周期内求和，则得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] \\ &= \tilde{X}(r)\end{aligned}$$

把 r 换成 k 可得

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3-4)$$

这就是求从 $k=0$ 到 $N-1$ 的 N 个谐波系数 $\tilde{X}(k)$ 的公式，同时可以看出， $\tilde{X}(k)$ 也是一个以 N 为周期的周期序列，即

$$\tilde{X}(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+mN)} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{X}(k)$$

这和离散傅里叶级数只有 N 个不同的系数 $\tilde{X}(k)$ 的说法是一致的。可以看出，时域周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数在频域(即其系数 $\tilde{X}(k)$)也是一个周期序列。因而 $\tilde{X}(k)$ 与 $\tilde{x}(n)$ 是频域与时域的一个周期序列对，式(3-2)与式(3-4)一起可看作是一对相互表达的周期序列的离散傅里叶级数(DFS)对。

为了表示方便，常常利用复数量 W_N 来表示这两个式子。 W_N 定义为

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (3-5)$$

使用 W_N ，式(3-2)和式(3-4)可表示周期序列的傅里叶级数变换对

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \quad (3-6)$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \quad (3-7)$$

式(3-6)、式(3-7)中， n 和 k 都是离散变量。如果将 n 当作时间变量， k 当作频率变量，则 $\text{DFS}[\]$ 表示时域到频域的离散傅里叶级数正变换， $\text{IDFS}[\]$ 表示频域到时域的离散傅里叶级数的反变换。

从上面看出，只要知道周期序列一个周期的内容，其他内容也都知道了。所以，这种无限长序列实际上只有一个周期的 N 个序列值有信息。因此，在式(3-6)和式(3-7)中只取 N 个值来求和就够了。这也正是周期序列和有限长序列之间的本质联系。



背景资料

一个域的离散必然造成另外一个域的周期延拓，即时域中离散造成频域的周期延拓，同样频域中的离散也必定造成时域的周期延拓。在频域中将有限长序列 $x(n)$ (采样时间间隔为 T ，采样频率为 $f_s = \frac{1}{T}$ 、 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$) 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 进行离散化，频域的离散化造成



时间函数也呈周期性，所以级数应限制在一个周期 T_0 内。频域采样间隔为 Ω_0 ，即令 $\Omega = k\Omega_0 = k \cdot 2\pi F_0$ ，则 $d\Omega = \Omega_0$ ，因而序列的傅里叶变换为

$$X(e^{jk\Omega_0 T}) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-jn k \Omega_0 T}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{jk\Omega_0 T}) e^{jn k \Omega_0 T}$$

时间函数是离散的，频率是离散的，所以有时间函数的周期为

$$T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

所以

$$\Omega_0 T = \frac{2\pi F_0}{N F_0} = \frac{2\pi \Omega_0}{\Omega_s} = \frac{2\pi}{N}$$

因此有

$$X(e^{jk\Omega_0 T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{jk\Omega_0 T}) e^{jn \frac{2\pi}{N} k}$$

这一变换对可以通过示意图 3.2 说明。

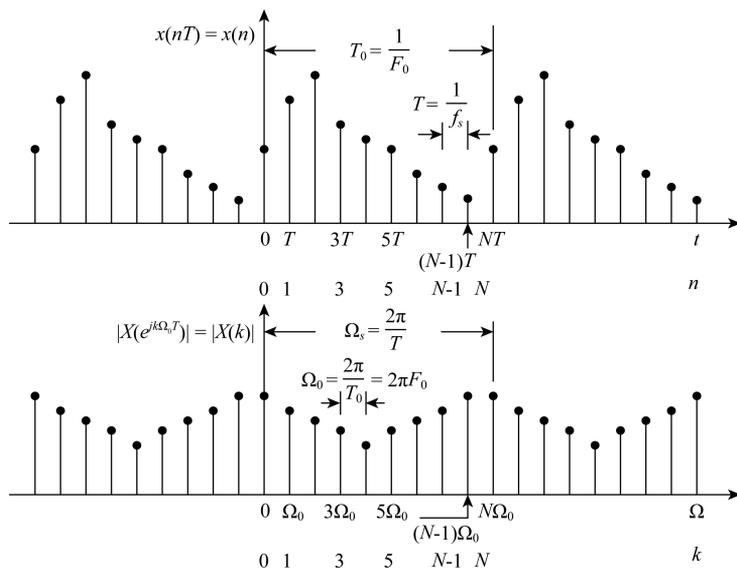


图 3.2 离散周期的时间函数及其周期离散的频谱函数 $N = \frac{T_0}{T} = \frac{\Omega_s}{\Omega_0}$

3.2.2 离散傅里叶级数的性质

由于 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 两者都具有周期性，这就使它与序列的 z 变换性质有一些重要差别。此外，DFS 在时域和频域之间具有严格的对偶关系，这是序列 z 变换所不具有的。



设 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 皆为周期为 N 的周期序列, 它们各自的 DFS 分别为

$$\tilde{X}_1(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)]$$

$$\tilde{X}_2(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$$

1. 线性性质

$$\text{DFS}[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k) \quad (3-8)$$

式(3-8)中, a 和 b 为任意常数, 所得到的频域序列也是周期序列, 周期为 N 。这一性质可有 DFS 定义直接证明。

2. 序列的移位

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \tilde{X}(k) \quad (3-9)$$

$$\text{DFS}[W_N^m \tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+l) \quad (3-10a)$$

或 $\text{IDFT}[\tilde{X}(k+l)] = W_N^m \tilde{x}(n) \quad (3-10b)$

由 DFS 变换的定义可以证明式(3-9)。

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk} = \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} W_N^{-mk}$$

其中, $i=n+m$, $\tilde{x}(n)$ 、 W_N^{ki} 都是以 N 为周期的函数, 所以有

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

3. 周期卷积

如果频域中周期同为 N 的序列 $\tilde{X}_1(k)$ 、 $\tilde{X}_2(k)$ 、 $\tilde{Y}(k)$ 满足条件

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)$$

则有

$$\tilde{y}(n) = \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \tilde{x}_1(n-m) \quad (3-11)$$

证明: 由离散傅里叶级数反变换的定义可得

$$\tilde{y}(n) = \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) W_N^{-nk} \quad (3-12)$$

将 $\tilde{x}_1(n)$ 、 $\tilde{X}_1(k)$ 间的变换关系

$$\tilde{X}_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1(n) W_N^{nk}$$

代入式(3-12), 得

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{mk} \tilde{X}_2(k) W_N^{-nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2(k) W_N^{-(n-m)k} \right] \end{aligned}$$

同样，由于 DFS 和 IDFS 变换的对称性，可以证明时域周期序列的乘积对应着频域周期序列的周期卷积。即

如果 $\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_2(n)$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \tilde{Y}(k) &= \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \tilde{X}_1(k-l) \end{aligned} \quad (3-14)$$

4. 对偶性

从 DFS 和 IDFS 变换的公式看出，两个表达式形式上是一样的，仅仅差因子 $\frac{1}{N}$ 和 W_N 的指数的正负号，周期序列 $\tilde{x}(n)$ 与其 DFS 的系数 $\tilde{X}(k)$ 是同一类函数，即都是周期的离散的序列，因而存在时域和频域的对偶关系。

将式(3-7)

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

中的变量 n 变换为 $-n$ ，可以得到

$$N \tilde{x}(-n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{nk} \quad (3-15)$$

式(3-15)的右边与式(3-6)具有相同的 DFS 正变换的形式，将(3-15)中的 n 变换为 k ，可得

$$N \tilde{x}(-k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) W_N^{kn} \quad (3-16)$$

因而有以下的对偶关系

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k) \quad (3-17)$$

$$\text{DFS}[\tilde{X}(n)] = N \tilde{x}(-k) \quad (3-18)$$

3.3 离散傅里叶变换的定义与物理意义

3.3.1 离散傅里叶变换的定义

在实际应用中，把无限长的周期序列送给计算机处理是不现实的，也是不必要的。在 3.2 节讨论过，周期序列实际上只有有限个序列值有意义，它和有限长序列有着本质的联系。实际上，可以把长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 看成周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期，这样，利用离散傅里叶级数计算周期序列的一个周期，也就计算了有限长序列的离散傅里叶变换。本节将根据周期序列和有限长序列之间的这种本质关系，由周期序列的离散傅里叶级数推导出有限长序列的离散频域表示，即离散傅里叶变换(DFT)。



由 3.2 节讨论的两者之间的关系，离散傅里叶变换可以按以下 3 个步骤由 DFS 推导出来：

- (1) 将有限长 $x(n)$ 序列延拓成周期序列；
- (2) 求周期序列的 DFS；
- (3) 从 DFS 中取出一个周期便可得到有限长序列的 DFT。具体进行推导如下。

设 $x(n)$ 为有限长序列，长度为 N ，即 $x(n)$ 只在 $n=0$ 到 $N-1$ 点上有值，其他 n 时， $x(n)=0$ 。为了引用周期序列的概念，把它看成周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期，而把 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 的以 N 为周期的周期延拓，即表示成

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN)$$

这个关系可以用图 3.4 来说明。通常把 $\tilde{x}(n)$ 的第一个周期 $n=0$ 到 $N-1$ 定义为“主值区间”，故称 $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的“主值序列”，即主值区间上的序列。而称 $\tilde{x}(n)$ 为 $x(n)$ 的周期延拓序列。

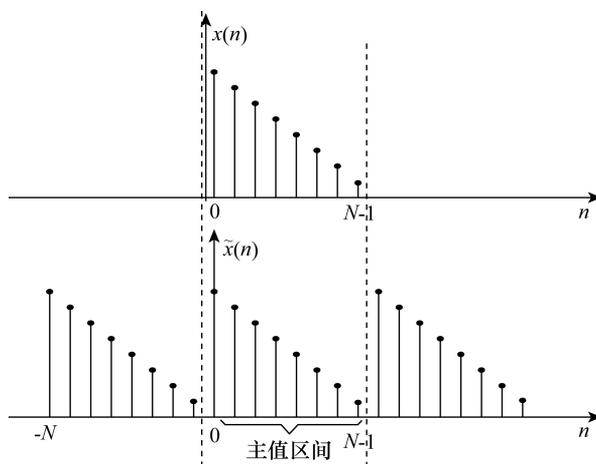


图 3.4 有限长序列及其周期延拓

频域的周期序列 $\tilde{X}(k)$ 也可以看成是对有限长序列 $X(k)$ 的周期延拓，而有限长序列 $X(k)$ 可看成是周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列，即

$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

周期序列的傅里叶级数变换 DFS 和傅里叶级数反变换 IDFS 的定义式为

$$\text{DFS:} \quad \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3-19)$$

$$\text{IDFS:} \quad \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3-20)$$

序列 $\tilde{X}(k)$ 、 $\tilde{x}(n)$ 的周期性都是由周期为 N 的复数序列 $e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$ 、 $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ 体现，也就是说，计算周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的数值时，只需要序列 $\tilde{X}(k)$ 在区间 $[0, N-1]$ 的数值；同样计算 \tilde{x}



$x(n)$ 的数值, 也仅仅需要 $\tilde{x}(n)$ 在区间 $[0, N-1]$ 上的数值。显然式(3-19)、(3-20)中的变量 k 、 n 可以在整个区间上都成立, 当然在区间 $[0, N-1]$ 上也成立, 即存在下列表达式

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{X}(k) R_N(k) \quad (3-21)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{x}(n) R_N(n) \quad (3-22)$$

式(3-21)、式(3-22)中, $x(n)$ 和 $X(k)$ 是一个有限长序列的离散傅里叶变换对。称式(3-21)为 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换(DFT), 称式(3-22)为 $X(k)$ 的 N 点离散傅里叶反变换(IDFT)。已知其中的一个序列, 就能唯一地确定另一个序列。这是因为 $x(n)$ 与 $X(k)$ 都是点数为 N 的序列, 都有 N 个独立值(可以是复数), 所以信息等量。此外, 值得强调的是, 在使用离散傅里叶变换时, 必须注意所处理的有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的。换句话说, 离散傅里叶变换隐含着周期性。

例 3-1 试计算长度为 N 的序列 $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$, ($n=0, 1, 2, \dots, N-1$) 的离散傅里叶变换。

解: 由欧拉公式可得

$$x(n) = \frac{1}{2} (e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}) = \frac{1}{N} \left(\frac{N}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{N}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n} \right)$$

$$X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} & k=1 \\ 0 & \text{其他} \\ \frac{N}{2} & k=N-1 \end{cases}$$

例 3-2 已知序列

$$X(k) = \begin{cases} 3 & k=0 \\ 1 & 1 \leq k \leq 9 \end{cases}$$

求其 10 点的 IDFT

解: 将序列 $X(k)$ 表示为

$$X(k) = 1 + 2\delta(k) \quad 0 \leq k \leq 9$$

写成这种形式, 就容易确定离散傅里叶反变换。由于一个单位冲激序列的 DFT 为常数

$$x_1(n) = \delta(n)$$

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)] = 1$$

同样, 一个常数的 DFT 是一个单位冲激(采样)序列

$$x_2(n) = 1$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)] = N\delta(k)$$

所以

$$x(n) = \delta(n) + \frac{1}{5}$$



3.3.2 离散傅里叶变换的物理意义

对于离散非周期信号的 $x(n)$ ，其离散时间傅里叶变换 $\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$ 是周期为 2π 的数字角频率 ω 的连续函数。在频域中对连续频谱 $X(e^{j\omega})$ 进行等间隔采样，得到离散的周期序列。根据频域采样定理，如果信号 $x(n)$ 为 N 点的有限长序列，则 $x(n)$ 可以表示为有限 N 项的复指数信号 $\{e^{j\frac{2\pi}{N}nk}; k=0, 1, \dots, N-1\}$ 的线性组合，即有限长 N 点序列 $x(n)$ 的表达式为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-23)$$

其中

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-24)$$

上式(3-24)称为有限长序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 DFT，式(3-23)称为有限长序列的离散傅里叶反变换 IDFT，序列 $x(n)$ 、 $X(k)$ 都是长度为 N 的序列，适合于应用计算机进行数值计算。

离散傅里叶变换的物理意义是：序列 $x(n)$ 的 DFT 等于序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换(DTFT)的等间隔采样值的主值序列，其采样间隔为 $\frac{2\pi}{N}$ 。对于长度为 N 的时域序列 $x(n)$ ，都可以用 N 项虚指数信号 $\{e^{j\frac{2\pi}{N}nk}; k=0, 1, \dots, N-1\}$ 的线性加权表示。不同的序列只是加权系数不同，该 N 点的加权系数就是序列 $x(n)$ 对应的频域序列 $X(k)$ 。

例 3-3 已知某长度为 $N=4$ 的离散时间信号 $x(n) = \{2, 3, 3, 2\}$ ， $n=0, 1, 2, 3$ 。

(1) 计算序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 和离散傅里叶变换 $X(k)$ ，并比较两者之间的关系；

(2) 若对序列 $x(n)$ 后补零，得到序列 $x_1(n) = \{2, 3, 3, 2, 0, 0, 0, 0\}$ ， $n=0, 1, 2, \dots, 7$ 计算其离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 和离散傅里叶变换 $X(k)$ ，有何结论？

解：(1) 根据离散时间傅里叶变换定义可得 $X(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\omega n} \\ &= 2 + 3e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} \\ &= 2(1 + e^{-j3\omega}) + 3(e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) \\ &= e^{-j\frac{3}{2}\omega} \left[4\cos\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 6\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right) \right] \end{aligned}$$

根据离散傅里叶变换的定义式可以得到长度 $N=4$ 的序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}nk}$$

即

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 10$$

$$X(1) = x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{4}} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2} + x(3)e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3} = -1 - j$$



$$X(2) = x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 4} + x(3)e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 6} = 0$$

$$X(3) = x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 6} + x(3)e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 9} = -1 + j$$

比较序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 与序列的离散傅里叶变换 $X(k)$ ，可以看到

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = e^{-j\frac{3}{2}\omega} \left[4\cos\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 6\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right) \right] \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{4}k}, k = 0, 1, 2, 3$$

$$X(k) = \{10, -1-j, 0, -1+j\}$$

(2) 将序列 $x(n)$ 补零为 $N=8$ 点的序列 $x_1(n)$ ，则其离散时间傅里叶变换为

$$X_1(e^{j\omega}) = \text{DTFT}(x_1(n)) = \sum_{n=0}^7 x_1(n)e^{-j\omega n} = 2 + 3e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega}$$

离散傅里叶变换

$$X_1(k) = X_1(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{8}k} = \{10, 2.707-6.535j, -1-j, 1.293-0.535j, 0, 1.293+0.535j, -1+j, 2.707+6.535j\}$$

比较例题 3-3 的计算结果可见，在有限长序列后补零，不会增加任何信息，补零前后的两序列对应的离散时间傅里叶变换 DTFT 完全一致，即 $X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})$ ，但补零前后两序列对应的 DFT 则存在明显差别。从信号表示的角度看，对于长度为 N 的时域序列 $x(n)$ ，可由 N 点 DFT 对应的频域序列 $X(k)$ 唯一表示， $X(k)$ 等于序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在一个周期 $[0, 2\pi]$ 内的等间隔采样值。但从信号频谱分析的角度看，在序列 $x(n)$ 后补零，可以在 $X(e^{j\omega})$ 的一个周期 $[0, 2\pi]$ 内获得更多的频谱采样值，从 $X_1(k)$ 中观察到频谱 $X(e^{j\omega})$ 更多的细节。序列 $x(n)$ 补零前后的频谱幅度与补零前后两序列的离散傅里叶变换之间的关系由图 3.5 和图 3.6 示意给出。

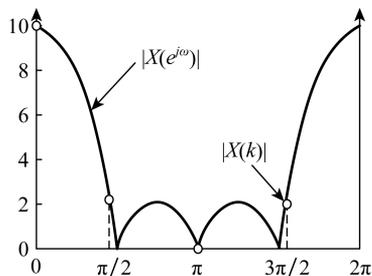


图 3.5 序列 $x(n)$ 的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 的关系

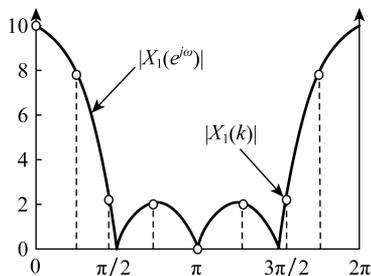


图 3.6 序列 $x_1(n)$ 的 $X_1(e^{j\omega})$ 、 $X_1(k)$ 的关系

3.4 离散傅里叶变换的性质

有限长序列的离散傅里叶变换可以从频域采样的角度进行理解，也可以从周期序列的 DFS 进行推导，因而 DFT 的许多性质与 DFS 性质存在相似之处。本节讨论离散傅里叶变换 (DFT) 的一些性质，它们在本质上和周期序列的离散傅里叶级数 (DFS) 概念有关，而且



是由有限长序列及其离散傅里叶变换隐含的周期性得出的。以下讨论的序列都是 N 点有限长序列，用 $\text{DFT}[\cdot]$ 表示 N 点序列的 DFT，且设

$$\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k), \quad \text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)。$$

1. 线性性质

设两个有限长序列分别为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ ，则

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

式中， a 、 b 为任意常数。序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 是长度为 N 点的序列，如果其中某一序列较短，则补零至相同的长度。

2. 圆周移位

一个长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位定义为

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n) \quad (3-25)$$

可以这样来理解式(3-25)所表达的圆周移位的含义。

具体计算步骤为：

(1) 将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓得到周期序列 $x((n))_N$ ；

(2) 将 $x(n)_N$ 移位 m 位得到序列 $x((n+m))_N$ ；

(3) 对移位后的周期序列 $x((n+m))_N$ 取主值区间 ($n=0$ 到 $N-1$) 上的序列值，即 $x((n+m))_N R_N(n)$ 。所以，一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位序列 $y(n)$ 依然是一个长度为 N 的有限长序列，这一过程可用图 3.7 表示。

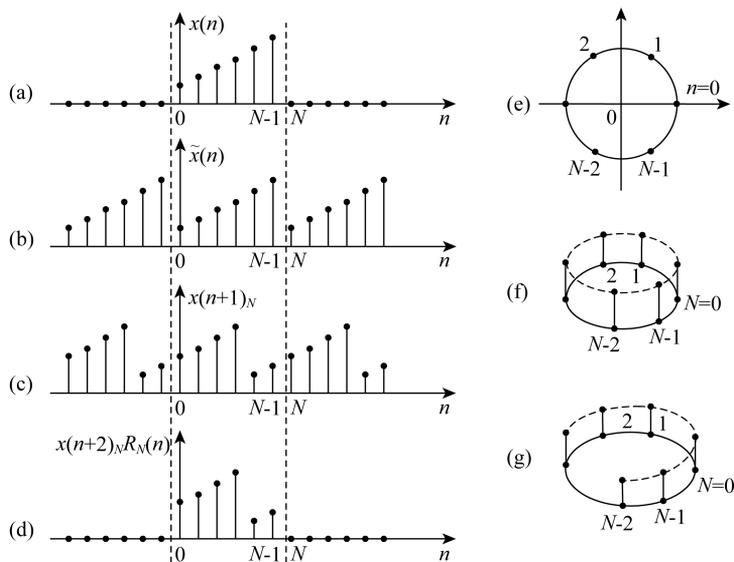


图 3.7 圆周移位过程示意图

从图 3.7 可以看出，由于是周期序列的移位，当只观察 $n=0$ 到 $N-1$ 这一主值区间时，随着某一采样值从该区间的一端移出，与其相同的采样值又从该区的另一端循环移进。因而，可以想象 $x(n)$ 是排列在一个 N 等分的圆周上，序列 $x(n)$ 的圆周移位，就相当于



$x(n)$ 在此圆周上旋转,如图 3.7(e)、(f)、(g)所示,因而称为圆周移位。若将 $x(n)$ 向左圆周移位时,此圆是顺时针旋转;若将 $x(n)$ 向右圆周移位时,此圆便是逆时针旋转。此外,如果围绕圆周观察几圈,那么看到的就是周期序列。

设 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $y(n)$ 为 $x(n)$ 圆周移位,即

$$y(n) = x(n+m)_N R_N(n)$$

则圆周移位后的 DFT 为

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \text{DFT}[x(n+m)_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k) \quad (3-26)$$

式(3-26)中, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

证明: 利用周期序列 DFS 的移位性质对式(3-26)加以证明。

$$\text{DFS}[x(n+m)_N] = \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

再利用周期序列的 DFS 变换与有限长序列的离散傅里叶变换 DFT 之间的关系可以得到

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x(n+m)_N R_N(n)] &= \text{DFT}[\tilde{x}(n+m) R_N(n)] \\ &= W_N^{-mk} \tilde{X}(k) R_N(n) \\ &= W_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

式(3-26)表明,有限长序列在时域的圆周移位造成离散频域中引入一个和频率成正比的线性相移 $W_N^{-mk} = e^{j\frac{2\pi}{N}mk}$,而对频谱的幅度没有影响。

对于频域有限长序列 $X(k)$,也可以看成是分布在一个 N 等分的圆周上,所以对 $X(k)$ 的圆周移位,利用频域与时域的对偶关系,可以证明有以下性质。

若
$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

则
$$\text{IDFT}[X(k+l)_N R_N(k)] = W_N^{lk} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n) \quad (3-27)$$

这就是调制特性。它说明,时域序列的相位调制等效于频域的圆周移位。

3. 圆周卷积

(1) 时域圆周卷积定理

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是点数为 N 的有限长序列 $0 \leq n \leq N-1$, 且有

$$\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$\text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

若
$$Y(k) = X_1(k) X_2(k)$$

则
$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m)_N) \cdot R_N(n) \quad (3-28)$$

一般称式(3-28)所表示的运算为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 N 点圆周卷积。下面先证明式(3-28),再说明其计算方法。

证明: 这个卷积相当于周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 作周期卷积后再取其主值序列。

先将 $Y(k)$ 进行周期延拓,得
$$\tilde{Y}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} Y(k+rN)$$



根据 DFS 的周期卷积公式

$$\tilde{y}(n) = \text{IDFT}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)$$

由于 $m=0, 1, 2, \dots, N-1$ 为主值区间, 有 $\tilde{x}_1(m) = x_1(m)$, 因此 $y(n) = \tilde{y}(n) R_N(n)$ 。将上式经过简单换元, 即可证明。

圆周卷积计算过程可以用图 3.8 来表示, 分为如下 5 步。

(1) 周期延拓。先把序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 作哑变量变换为 $x_1(m)$ 、 $x_2(m)$, 将 $x_2(m)$ 在参变量坐标 m 上延拓成周期为 N 的周期序列 $x_2((m))_N$ 。

(2) 翻转。将 $x_2((m))_N$ 翻转成 $x_2((-m))_N$ 。

(3) 移位和取主值。将 $x_2((-m))_N$ 移 n 位并取主值序列得到 $x_2((n-m))_N R_N(m)$ 。

(4) 相乘。将相同 m 值 $x_2((n-m))_N R_N(m)$ 与 $x_1(m)$ 相乘。

(5) 相加。将(4)中得到的乘积累加起来, 得到圆周卷积 $y(n)$ 。

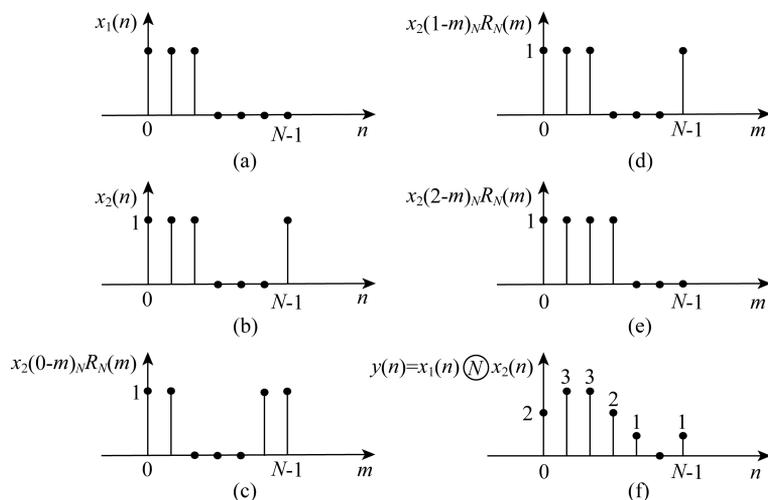


图 3.8 圆周卷积过程示意图

可以看出, 它和周期卷积过程基本相似, 只不过这里的圆周卷积要进行周期延拓和取主值序列运算。特别要注意, 两个长度小于等于 N 的序列的 N 点圆周卷积长度仍为 N , 这与一般的线性卷积不同。圆周卷积用符号 \textcircled{N} 来表示。圆圈内的 N 表示所作的是 N 点圆周卷积, 记为 $x_1 \textcircled{N} x_2(n)$ 。

(2) 频域圆周卷积定理

利用时域与频域的对称性, 可以证明圆周卷积定理。

若 $y(n) = x_1(n) x_2(n)$, $x_1(n)$, $x_2(n)$ 皆为 N 点有限长序列

则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N R_N \right] (k) \quad (3-29)$$



即时域序列相乘，其乘积的 DFT 等于各个序列 DFT 的圆周卷积再乘以 $\frac{1}{N}$ 。

4. 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

时域圆周卷积在频域上相当于两序列的 DFT 的乘积，因而可以采用快速傅里叶变换 (FFT) 算法来计算圆周卷积，与线性卷积相比计算速度可以大大加快。但是，在许多实际问题中常需要计算线性卷积，例如，一个 FIR 滤波器的输出等于输入与滤波器的单位采样响应的线性卷积。如果找到线性卷积和圆周卷积之间的关系，就能够用圆周卷积来计算线性卷积而加快计算速度。因此，讨论圆周卷积在什么条件下与线性卷积相等以及如何用圆周卷积运算来代替线性卷积运算的问题就非常重要。

设 $x_1(n)$ 是 N_1 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$)， $x_2(n)$ 是 N_2 点的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$)。它们的线性卷积为

$$y_l(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m)$$

$x_1(m)$ 的非零区间为 $0 \leq m \leq N_1 - 1$ ， $x_2(n-m)$ 的非零区间为 $0 \leq n-m \leq N_2 - 1$ ，将两个不等式相加，得 $0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$ 。

在上述区间外，不是 $x_1(m)$ 就是 $x_2(n-m) = 0$ ，因而 $y_l(n) = 0$ 。所以 $y_l(n)$ 是 $N_1 + N_2 - 1$ 点有限长序列，即线性卷积和序列的长度等于参与卷积的两序列的长度之和减去 1。例如，图 3.9 所示， $x_1(n)$ 为 $N_1 = 4$ 的矩形序列， $x_2(n)$ 为 $N_2 = 5$ 的矩形序列，则它们的线性卷积 $y_l(n)$ 为 $N = N_1 + N_2 - 1 = 8$ 点的有限长序列。

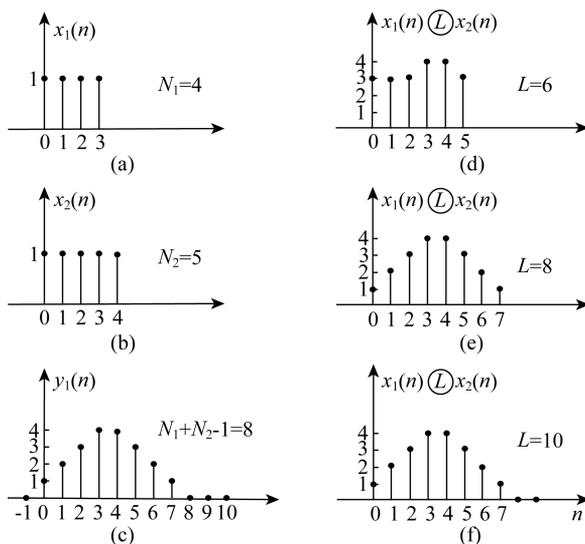


图 3.9 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

再来看 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的圆周卷积。先讨论长度为 L 点的圆周卷积，再讨论 L 为何值时，圆周卷积才能代替线性卷积。

设是 $y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n)$ 两序列的 L 点圆周卷积，这就要将 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 都看成是



L 点的序列。在这 L 个序列值中, $x_1(n)$ 只有前 N_1 个是非零值, 后 $L-N_1$ 个均为补充的零值。同样, $x_2(n)$ 只有前 N_2 个是非零值, 后 $L-N_2$ 个均为补充的零值。则

$$\begin{aligned} y(n) &= x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n) \end{aligned} \quad (3-30)$$

为了进行其圆周卷积的计算, 必须先将序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 以 L 为周期进行周期延拓, 即

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(n) &= x_1(n)_L = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_1(n+rL) \\ \tilde{x}_2(n) &= x_2(n)_L = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL) \end{aligned}$$

将它们代入到式 (3-30), 得到

$$\begin{aligned} y(n) &= x_1(n) \textcircled{L} X_2(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n) \end{aligned} \quad (3-31)$$

前面已经分析了 $y_l(n)$ 具有 N_1+N_2-1 个非零值。因此可以看到, 如果周期卷积的周期 $L < N_1+N_2-1$, 那么 $y_l(n)$ 的周期延拓就必然有一部分非零序列值要交叠, 从而出现混叠现象。只有在 $L \geq N_1+N_2-1$ 时, 才没有混叠现象。这时, 在 $y_l(n)$ 的周期延拓中, 每一个周期 L 内, 前 N_1+N_2-1 个序列值正好是 $y_l(n)$ 的全部非零值, 也正是 $y_l(n)$, 而剩下的 $L-(N_1+N_2-1)$ 个点上的序列值则是补充的零值。所以 L 点圆周卷积 $y(n)$ 是线性卷积 $y_l(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。亦即, 圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠的必要条件为

$$L \geq N_1+N_2-1$$

满足此条件后就有

$$y(n) = y_l(n)$$

即

$$x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = x_1(n) * x_2(n), \quad L \geq N_1+N_2-1$$

图 3.9(d)、(e)、(f) 反映了式 (3-31) 的圆周卷积与线性卷积的关系。在图 3.9(d) 中, $L=6$ 小于 $N_1+N_2-1=8$, 这时就产生了混叠现象, 因此其圆周卷积不等于线性卷积; 而在图 3.9(e)、(f) 中, $L=8$ 和 $L=10$, 这时圆周卷积与线性卷积结果相同, 所得到的 $y(n)$ 的前 8 点序列值正好代表线性卷积结果。所以只要 $L \geq N_1+N_2-1$, 圆周卷积结果就能完全代表线性卷积运算结果。

例 3-4 一个有限长序列为 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$



(1) 计算序列 $x(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换。

(2) 若序列 $y(n)$ 的 DFT 为 $Y(k) = e^{j\frac{2\pi}{10} \cdot 2k} X(k)$ 式中, $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换, 求序列 $y(n)$ 。

(3) 若序列 $y(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换是 $Y(k) = X(k)W(k)$ 。式中, $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 10 点 DFT, $W(k)$ 是 $w(n)$ 的 10 点 DFT

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

求序列 $y(n)$ 。

解: (1) 由离散傅里叶变换的定义式(3-24)得

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{10-1} [\delta(n) + 2\delta(n-5)] W_{10}^{nk} \\ &= 1 + 2W_{10}^{5k} = 1 + 2(-1)^k \end{aligned}$$

(2) 由时域圆周移位定理可得, 频域中 $e^{j\frac{2\pi}{10} \cdot 2k} X(k)$ 相当于时域中序列 $x(n)$ 移位 m 位, 且 $m = -2$, 所以有

$$y(n) = x(n+2)_{10} R_{10}(n) = \delta(n-8) + 2\delta(n-3)$$

(3) 频域中 $Y(k) = X(k)W(k)$ 对应时域中是 $x(n)$, $w(n)$ 的圆周卷积, 利用圆周卷积与线性卷积的关系, 可先求得线性卷积的数值

$$z(n) = x(n) * w(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2\}$$

由圆周卷积与线性卷积的关系得到圆周卷积的数值为

$$y(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} z(n+10r) \right] R_{10}(n) = \{3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 2\}$$

5. 共轭对称性

(1) 复共轭序列的 DFT

设 $x^*(n)$ 为 $x(n)$ 的复共轭序列, 长度为 N , $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$,

则

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-32)$$

式(3-32)中, $X(N) = X(0)$

证明: 将离散傅里叶变换的定义式 $X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$ 中的变量 k 用 $N-k$ 来代替并取共轭, 得到

$$X^*(N-k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(N-k)} \right]^* = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} = \text{DFT}[x^*(n)] \quad (3-33)$$

因为 $X(k)$ 的隐含周期性, 故 $X(N) = X(0)$ 。用同样的方法可以证明

$$\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k) \quad (3-34)$$

(2) DFT 的共轭对称性

在前面讨论了序列傅里叶变换的一些对称性质, 且定义了共轭对称序列与共轭反对称序列, 从中得知, 对称性是指关于坐标原点的纵坐标的对称性。DFT 也有类似的共轭对称



性,但在 DFT 中,涉及的序列 $x(n)$ 及其离散傅里叶变换 $X(k)$ 均为有限长序列,且定义区间为 0 到 $N-1$,所以,这里的对称性是指关于 $N/2$ 点的对称性。

设有限长序列 $x(n)$ 的长度为 N 点,则它的圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 分别定义为

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \quad (3-35)$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \quad (3-36)$$

则两者满足

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

如同任何实函数都可以分解成偶对称和奇对称分量一样,任何有限长序列 $x(n)$ 都可以表示成其圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 之和

$$\text{即} \quad x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

由式(3-35)、(3-36)两式和(3-33)、(3-34)可得到圆周共轭对称分量和圆周共轭反对称分量的 DFT 分别为

$$\text{DFT}[x_{ep}(n)] = \text{Re}[X(k)] \quad (3-37)$$

$$\text{DFT}[x_{op}(n)] = j\text{Im}[X(k)] \quad (3-38)$$

证明: 先证明(3-37)式的正确性,由式(3-35)得

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x_{ep}(n)] &= \text{DFT}\left[\frac{1}{2}(x(n) + x^*(N-n))\right] \\ &= \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n)] + \frac{1}{2}\text{DFT}[x^*(N-n)] \end{aligned}$$

利用式

$$X^*(k) = \text{DFT}[x^*(N-n)]$$

可得

$$\text{DFT}[x_{ep}(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] = \text{Re}[X(k)]$$

则(3-37)式得证。同理可证式(3-38)。

若用 $x_R(n)$, $x_I(n)$ 分别表示有限长序列 $x(n)$ 的实部及虚部,即

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n)$$

式中,

$$x_R(n) = \text{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \quad (3-39)$$

$$jx_I(n) = j\text{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \quad (3-40)$$

则有





$$\text{DFT}[x_R(n)] = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \quad (3-41)$$

$$\text{DFT}[jx_I(n)] = X_{op}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \quad (3-42)$$

式中, $X_{ep}(k)$ 是 $X(k)$ 的圆周共轭对称分量, 且 $X_{ep}(k) = X_{ep}^*(N-k)$, $X_{op}(k)$ 为 $X(k)$ 的圆周共轭反对称分量, 且 $X_{op}(k) = -X_{op}^*(N-k)$ 。

证明: 由式(3-41)可以得到

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x_R(n)] &= \frac{1}{2} \{ \text{DFT}[x(n)] + \text{DFT}[x^*(n)] \} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} \right] \\ &= \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)] \\ &= X_{ep}(k) \end{aligned}$$

这说明, 复序列实部的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭对称分量。同理可证, 式(3-42)说明复序列虚部的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭反对称分量。

(3) 实信号 DFT 变换

设信号 $x(n)$ 是长度为 N 的实序列, 其 N 点 DFT 用 $X(k)$ 表示, 由离散傅里叶变换的定义式可以得到序列 $X(k)$ 具有共轭对称性质, 即

$$X(k) = X^*(N-k) \quad (3-43)$$

将序列 $X(k)$ 表示成极坐标的形式 $X(k) = |X(k)|e^{j\theta(k)}$, 由 $X(k)$ 的共轭性质说明序列 $X(k)$ 的模以 $k=N/2$ 偶对称, 相位以 $k=N/2$ 点奇对称, 即

$$|X(k)| = |X(N-k)|, \quad \theta(k) = -\theta(N-k) \quad (3-44)$$



知识拓展

由实数序列的共轭对称性质计算实数序列的 DFT, 可以减少计算量。运用该性质能够用一次复数序列的 N 点的离散傅里叶变换, 计算两个不同实数序列的 N 点的 DFT 或计算 $2N$ 点实数序列的 DFT。

(1) 设序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 均为长度为 N 的实数序列, 将两序列按下式构造序列

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n) \quad (3-45)$$

对式(3-45)进行 N 点的 DFT 运算, 得

$$W(k) = \text{DFT}[w(n)] = \text{DFT}[x_1(n)] + j\text{DFT}[x_2(n)] = X_1(k) + jX_2(k)$$

所以

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)] = W_{ep}(k) = \frac{1}{2}[W(k) + W^*(N-k)] \quad (3-46)$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)] = \frac{1}{j}W_{op}(k) = \frac{1}{2j}[W(k) - W^*(N-k)] \quad (3-47)$$



这样只需要计算一个复数序列的 N 点 DFT, 得到 $W(k)$, 利用(3-46)、(3-47)就容易得到实数序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的 DFT, 显然减少了运算量。

(2) $2N$ 点实数序列的 DFT, 可以用 N 点复数序列的 DFT 得到。

设 $v(n)$ 是 $2N$ 点的实数序列, 将序列 $v(n)$ 按照序列的奇偶点数进行分组, 分解为两个长度均为 N 点的序列 $x_1(n)$, $x_2(n)$, 即

$$x_1(n) = v(2n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$x_2(n) = v(2n+1) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

由 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 构造长度为 N 的复数序列 $w(n)$, 即

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

利用式(3-46)、(3-47)得到序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的离散傅里叶变换 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$, 由 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 可以得到实数序列 $v(n)$ 的 $2N$ 点的 DFT, 即 $V(k)$ 。

证明:

$$\begin{aligned} V(k) &= \text{DFT}[v(n)] = \sum_{n=0}^{2N-1} v(n) W_{2N}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} v(2n) W_{2N}^{k2n} + \sum_{n=0}^{N-1} v(2n+1) W_{2N}^{k(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) W_N^{kn} + W_{2N}^k \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) W_N^{kn} \\ &= X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \end{aligned}$$

利用 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 的周期性, 可以计算得到序列 $V(k)$ 。

综上所述, 可以归纳证明 $x(n)$ 与 $X(k)$ 的奇、偶, 虚、实关系, 见表 3-1。利用这些关系, 可以减少 DFT 的运算量。

表 3-1 序列及其 DFT 的奇、偶、虚、实关系

$x(n)$ (或 $X(k)$)	$X(k)$ (或 $x(n)$)
偶对称	偶对称
奇对称	奇对称
实数	实部为偶对称, 虚部为奇对称
虚数	实部为奇对称, 虚部为偶对称
实数偶对称	实数偶对称
实数奇对称	虚数奇对称
虚数偶对称	虚数偶对称
虚数奇对称	实数奇对称

注意, 这里对有限长序列 $x(n)$ 或 $X(k)$ 的奇偶是指把序列排在一个圆周上, 对 $n=0$ ($k=0$) 为对称中心的奇偶对称。





6. DFT 形式下的帕塞瓦定理

设长度为 N 的序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X(k)$, 则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3-48)$$

证明: 首先计算 $\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n) &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k) \end{aligned}$$

设 $y(n) = x^*(n)$, 代入上式可以得到

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X^*(k)$$

即上述结论得证。

3.5 DFT 与序列的 z 变换、DTFT 以及 DFS 的关系

3.5.1 DFT 与序列的傅里叶变换、 z 变换的关系

如果 $x(n)$ 是一个 N 点的有限长序列, 对 $x(n)$ 进行 z 变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \quad (3-49)$$

比较 z 变换与序列的傅里叶变换、序列的离散傅里叶变换, 我们可以看到, 当 $z = e^{j\omega}$ 时序列的 z 变换与序列的傅里叶变换相等, 即

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3-50)$$

式(3-50)表明序列的傅里叶变换的取值与序列在单位圆的圆周上的 z 变换相等; 而当 $z = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 时, 序列的 z 变换与序列的离散傅里叶变换相等, 即

$$X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3-51)$$

序列的 z 变换与序列的离散傅里叶变换之间的关系可以表示为下式

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad (3-52)$$

式(3-52)表明, 序列 $X(k)$ 可以看作是序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在主值区间 $[0, 2\pi]$ 的 N 点等间隔采样, 采样间隔为 $\frac{2\pi}{N}$ 。显而易见, DFT 的变换区间长度 N 不同, 表示对 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 的采样间隔和采样点数不同, 所以 DFT 的变换结果也不同。



图 3.10 说明了序列的 z 变换与序列的离散傅里叶变换、离散时间傅里叶变换之间的关系。

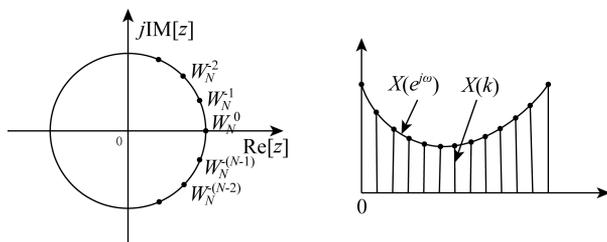


图 3.10 DFT 与序列傅里叶变换、 z 变换的关系

3.5.2 DFT 与 DFS 变换之间的关系

DFS 是周期序列的离散傅里叶级数变换，DFT 是有限长序列的离散傅里叶变换，对比 DFS 和 DFT 的定义，会发现 DFS 和 DFT 之间的密切关系。

首先，利用长度为 M 的有限长序列 $x(n)$ 构造一个周期序列。将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓，形成周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，用下式表示

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN) = x((n))_N \quad (3-53)$$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n), \quad N \geq M \quad (3-54)$$

毫无疑问，当 $N \geq M$ 时，上式中 $\tilde{x}(n)$ 就是有限长序列 $x(n)$ 以 N 为周期的延拓序列，而序列 $x(n)$ 是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列。

由周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 以及有限长序列 $x(n)$ 的 DFT 的定义式来分析二者的关系，DFS 变换与 IDFS 的定义式为

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3-55)$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

DFT 变换与 IDFT 的定义式为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3-56)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

比较上面(3-55)、(3-56)两式，发现它们右边的函数形式一样，但 k 的定义域不同， $X(k)$ 只是 $\tilde{X}(k)$ 的主值区序列，或者说 $\tilde{X}(k)$ 是 $X(k)$ 以 N 为周期进行周期延拓的序列。式(3-55)、(3-56)两式说明了 DFT 和 DFS 之间的关系。这些关系式成立的条件是 $N \geq M$ ，



即 DFT 的变换区间 N 不能小于 $x(n)$ 的长度 M 。如果该条件不满足, 按照式 (3-54) 将 $x(n)$ 进行延拓时, 将发生时域混叠。

例 3-5 有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{其他 } n \end{cases}$$

求其以 $N=5$ 为周期序列的 DFS 变换及序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换, 将计算结果进行比较。

解: 将序列 $x(n)$ 以 5 为周期进行周期延拓得到周期序列 $\tilde{x}(n)$, 如图 3.11 所示。

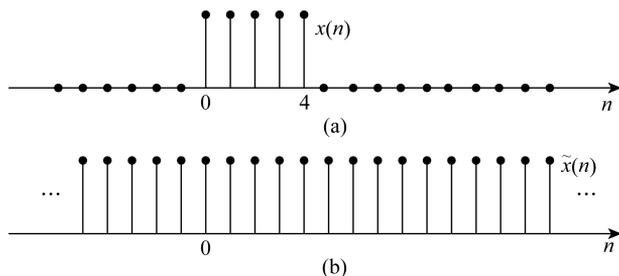


图 3.11 序列 $x(n)$ 与周期序列 $\tilde{x}(n)$

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数变换为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j(2\pi k/N)}} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{其他 } k \text{ 值} \end{cases}$$

显然 $\tilde{X}(k)$ 的取值就是序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在频率 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 处的采

样值。上式表明只有在 $k=0$ 和 $k=rN(r=\pm 1, \pm 2, \dots)$ 时才有非零的 DFS 的系数 $\tilde{X}(k)$ 。

利用离散傅里叶变换的定义式直接求得 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 。

$$X(k) = \sum_{n=0}^4 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{5}k}} = \begin{cases} 5 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

对比有限长序列 $x(n)$ 和周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的联系, 两序列的差别似乎很小, 因为利用这两个关系式可以直接从其中一个构造出另一个。然而在研究 DFT 的性质以及改变 $x(n)$ 对 $X(k)$ 的影响时, 这种差别是很重要的。

信号时域采样理论实现了信号时域的离散化, 使我们能用数字技术在时域对信号进行处理。而离散傅里叶变换理论实现了频域离散化, 因而开辟了用数字技术在频域处理信号的新途径, 从而推进了信号的频谱分析技术向更深、更广的领域发展。



3.6 频域采样定理

在 3.5 节中已经讲到, 周期序列的离散傅里叶级数的系数 $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期的序列在 z 平面单位圆圆周上的 N 个采样值的 z 变换相等, 也可以说系数 $\tilde{X}(k)$ 与序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在频域的等间隔采样值相等, 这就实现了频域的采样。时域采样定理表明, 在一定条件下, 可以通过时域离散采样重建或恢复原来的连续信号。那么, 在频域中采样后, 满足哪些条件可以恢复出原来信号的频谱函数呢? 本节就这些问题进行讨论。

设一个任意绝对可和的非周期序列 $x(n)$, 其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

由于绝对可和, 所以其傅里叶变换存在且连续, z 变换的收敛域包含单位圆的圆周。如果对 $X(z)$ 在 z 平面单位圆的圆周上, 即频率 $[0, 2\pi]$ 之间 N 个频率点上对序列的傅里叶变换进行等间隔采样, 得到频域离散周期序列

$$\tilde{X}(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)W_N^{nk} \quad (3-57)$$

现在讨论的问题在于, 这样在 z 平面单位圆的圆周上进行采样之后的序列值能不能恢复出序列 $x(n)$? 为此, 由周期序列 $\tilde{X}(k)$ 求其离散傅里叶级数反变换, 令其为 $\tilde{x}_N(n)$

$$\tilde{x}_N(n) = \text{IDFT}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

把(3-57)代入上式, 可以得到

$$\tilde{x}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)W_N^{mk} \right] W_N^{-nk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} \right]$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m = n + rN, \quad r \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } m \end{cases}$$

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) \quad (3-58)$$

式(3-58)说明, 由序列 $\tilde{X}(k)$ 得到的周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 是原非周期序列 $x(n)$ 的以 N 为周期的延拓序列。在 1.4 节中介绍了时域采样造成频域的周期延拓, 从公式(3-58)可以看到频域采样同样造成时域中的周期延拓。所以有以下结论。

(1) 如果序列 $x(n)$ 不是有限长序列, 则时域周期延拓后, 必定会造成时域中信号的混叠, 产生假信号。当 n 增加时信号衰减越快, 或频域采样越密, 误差就越小。

(2) 如果信号 $x(n)$ 是有限长序列, 且点数为 M , 当频域采样点数不够密集时, 即



$N < M$, 序列 $x(n)$ 以 N 为周期进行延拓, 就会产生混叠, 从 $\tilde{x}_N(n)$ 中就不能不失真地恢复出信号 $x(n)$; 如果 $N > M$, 则能够从 $\tilde{x}_N(n)$ 中不失真地恢复出信号 $x(n)$ 。

(3) 如果时域中序列 $x(n)$ 的点数小于或等于 N , 则可以利用序列 $x(n)$ 的 z 变换在 z 平面单位圆的圆周上的 N 等分采样值精确地表示。

因此, 频域采样定理可以表述如下。

如果序列 $x(n)$ 为 M 点的有限长序列, 对其频谱 $X(e^{j\omega})$ 在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上等间隔采样 N 点, 得到序列 $X(k)$ 。当 $N \geq M$ 时才能有频域采样序列 $X(k)$ 恢复出序列 $x(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)]R_N(n)$, 否则将产生时域混叠失真。

既然频域采样序列 $\tilde{X}(k)$ 的 N 个采样值 $X(k)$ 能够不失真地恢复出 $x(n)$, 那么这 N 个采样值 $X(k)$ 也一定能够完全地表达 $X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 。

设有限长序列 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

由于

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

将其代入 $X(z)$ 的表达式中, 得到

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned} \quad (3-59)$$

式(3-59)就是用频域中的 N 个频率采样值 $X(k)$ 来表示 $X(z)$ 的内插公式。它可以表示为

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \quad (3-60)$$

$$\text{式(3-60)中} \quad \Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3-61)$$

式(3-61)称为内插函数, 令(3-61)式分子等于零, 可以得到该函数的零点

$$z_i = e^{j\frac{2\pi}{N}i}, \quad i=0, 1, 2, \dots, N-1$$

分母等于零, 有 $z_l = e^{j\frac{2\pi}{N}l}$ 一个极点。可以看出内插函数在 z 平面单位圆的圆周的 N 个等分点有 N 个零点和一个极点, 第 l 个极点与其第 k 个零点相抵消。因而插值函数仅仅在 $l=k$ 处不为零, 其他 $N-1$ 个零点处皆为零。如图 3.12 所示。

由序列 $x(n)$ 的 z 变换和频率响应 $X(e^{j\omega})$ 之间的关系, 得到

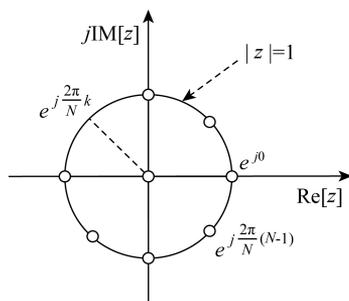


图 3.12 内插函数的零极点分布图



$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad \Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - k\frac{2\pi}{N})}} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]} e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{k\pi}{N})} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} e^{j\frac{k\pi}{N}(N-1)} e^{-\frac{N-1}{2}\omega} \end{aligned} \quad (3-62)$$

将式(3-62)表示成更方便的形式

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi(\omega - 2\pi k/N)$$

其中

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \quad (3-63)$$

所以有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi(\omega - 2\pi k/N) \quad (3-64)$$

频域插值函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性和相位特性如图 3.13 所示。

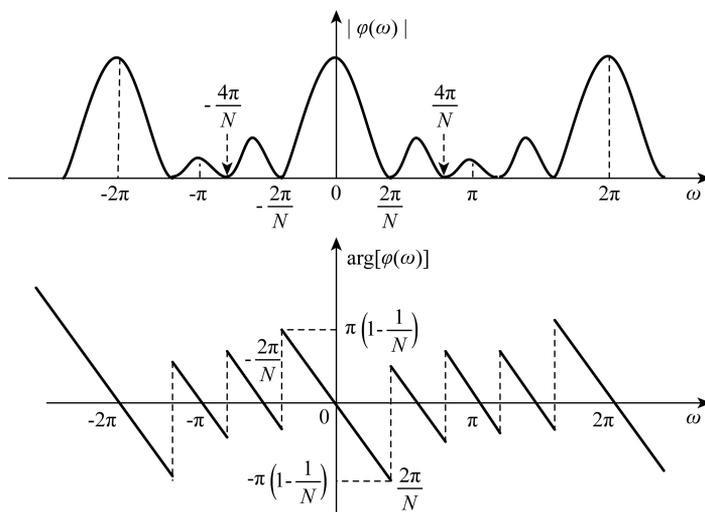


图 3.13 频域插值函数的幅度特性与相位特性 ($N=5$)

其中, 相位呈线性相移加上一个 π 的一个整数倍的相移变化, $\Phi(\omega)$ 每隔 $2\pi/N$ 的整数倍相位翻转, 因而每隔 $2\pi/N$ 的整数倍 $\Phi(\omega)$ 的相位要加上 π 。当变量 $\omega=0$ 时, $\Phi(\omega)=1$; 当 $\omega=i\frac{2\pi}{N}$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) 时, $\Phi(\omega)=0$ 。因而, 可以知道, $\Phi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$ 满足以下关系

$$\Phi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = \begin{cases} 1, & \omega = k\frac{2\pi}{N} = \omega_k \\ 0, & \omega = i\frac{2\pi}{N} = \omega_i, i \neq k \end{cases} \quad (3-65)$$



式(3-65)说明, 函数 $\Phi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$ 在采样点 $\left(\omega=k\frac{2\pi}{N}\right)$ 上时, $\Phi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)=1$; 在其他非采样点 $\left(\omega=i\frac{2\pi}{N}, i\neq k\right)$ 上时, 函数 $\Phi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)=0$ 。频率特性 $X(e^{j\omega})$ 是由 N 个 $\Phi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$ 函数分别与 $X(k)$ 相乘后求和。所以很明显可以看出, 在每一个采样点上 $X(e^{j\omega})$ 精确地等于 $X(k)$, 即

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = X(k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

一般情况下, $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 都是复数。在各采样点上的 $X(e^{j\omega})$ 与 $X(k)$ 相等, 各采样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 值由各采样点的加权函数 $X(k)\Phi(\omega-2\pi k/N)$ 在所求 ω 点上的值的叠加得到, 如图 3.14 所示。

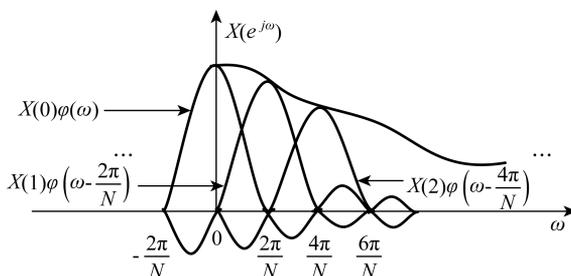


图 3.14 由内插函数求得的 $X(e^{j\omega})$ 的示意图

3.7 快速傅里叶变换

DFT 在信号处理中得到广泛地应用, 一个重要的原因就在于其存在高效算法。DFT 使计算机在频域处理信号成为可能, 但是当 N 很大时, 直接计算 N 点 DFT 的计算量非常大。快速傅里叶变换 (FFT, Fast Fourier Transform) 可使 DFT 的运算量下降几个数量级, 从而使数字信号处理的速度大大提高。

3.7.1 直接计算 DFT 存在的问题以及改进途径

1. 直接计算 DFT 的运算量

设长度为 N 点有限长序列 $x(n)$, 其 DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-66)$$

反变换 (IDFT) 为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-67)$$



式(3-66)、(3-67)的差别在于 W_N 的指数不同, 以及差一个常数因子 $\frac{1}{N}$, 所以下面只讨论 DFT 的运算量, IDFT 具有与 DFT 完全相同的运算量。

一般来说, $x(n)$ 和 W_N^{mk} 都是复数, $X(k)$ 也是复数, 因此每计算一个 $X(k)$ 值, 需要 N 次复数乘法和 $N-1$ 次复数加法。而 $X(k)$ 一共有 N 个点 (k 从 0 取到 $N-1$), 所以完成整个 DFT 运算总共需要 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$ 次复数加法。在这些运算中乘法运算要比加法运算复杂, 需要的运算时间也多一些。因为复数运算实际上是由实数运算来完成, 这时式(3-66)可写成

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (a + jb)(c + jd)$$

的形式, 由此可见, 一次复数乘法需用 4 次实数乘法和 2 次实数加法; 一次复数加法需用 2 次实数加法。因而每运算一个 $X(k)$ 需 $4N$ 次实数乘法和 $2N+2(N-1)=2(2N-1)$ 次实数加法, 所以整个 DFT 运算总共需要 $4N^2$ 次实数乘法和 $2N(2N-1)$ 次实数加法。

从上面的统计可以看到, 直接计算 DFT, 乘法次数和加法次数都是与 N^2 成正比的, 当 N 很大时, 运算量是很大的, 有时甚至是无法忍受的。例如当 $N=8$ 时, DFT 需 64 次复数乘法, 计算量小, 而当对一幅 $N \times N$ 的二维图像进行 DFT 变换, $N=1024$ 时, 直接计算 DFT 所需复数乘法次数约为 10^{12} ($(N^2)^2 \approx 10^{12}$) 次, 如果用每秒可做 10 万次复数乘法的计算机, 即使不考虑加法运算时间, 也需要近 3000 小时。这对实时性很强的信号处理来说, 要么提高计算机的计算处理速度, 而这样对计算速度的要求太高了; 要么就改进 DFT 的计算方法, 减少复数乘法、加法运算次数。

2. 改进途径

下面讨论减少运算量的途径。仔细观察 DFT 的运算过程就可以看出, 利用系数(旋转因子) W_N^{mk} 的以下固有特性, 就可以减少运算量。

- (1) W_N^{mk} 的对称性 $(W_N^{N-m})^* = W_N^m$
- (2) W_N^{mk} 的周期性 $W_N^{m+rN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+rN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}m} = W_N^m$
- (3) W_N^{mk} 的可约性 $W_{mN}^{km} = W_{mN/m}^{km/m} = W_N^{mk}$

利用这些特性, DFT 运算中有些项便可以合并, 并能将长序列的 DFT 分解为短序列的 DFT 进行运算。而前面已经讲到, DFT 的运算量与 N^2 成正比的, 所以 N 越小越有利, 因而小点数序列的 DFT 的运算量要小。

快速傅里叶变换算法正是基于这样的基本思想而发展起来的。它的算法形式很多种, 但基本上可以分为两大类, 即按时间抽选(Decimation-In-Time, 缩写为 DIT)法和按频率抽选(Decimation-In-Frequency, 缩写为 DIF)法。下面分别进行讨论。

3.7.2 按时间抽选的基-2FFT 算法

1. 算法原理

设序列点数为 $N=2^M$, M 正整数, 若不满足这个条件, 可以补若干个零值点, 以达到



这一要求。这种 N 为 2 的整数幂的 FFT 称为基 2-FFT。

按时间抽选(DIT)的基 2-FFT 算法的基本出发点是, 利用旋转因子 W_N^m 的对称性和周期性, 将一个长序列的 DFT 分解为一些点数逐次变小的 DFT 来计算。分解过程遵循两条规则:

- (1) 对时间进行奇偶分解;
- (2) 对频率进行前后分解。

设序列 $x(n)$ 长度为 N , 且满足 $N=2^M$, M 为正整数。按 n 的奇偶性把 $x(n)$ 分解为两个 $\frac{N}{2}$ 点的子序列

$$\begin{aligned} x(2r) &= x_1(r) \\ x(2r+1) &= x_2(r) \quad r=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1 \end{aligned}$$

则可将 DFT 化为

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \\ &= \sum_{\substack{n \text{ 为偶数} \\ n=0, 2, \dots, N-2}} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\substack{n \text{ 为奇数} \\ n=1, 3, \dots, N-1}} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk} \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3-68)$$

式(3-68)说明, 将序列 $x(n)$ 按照 n 的奇偶性分解为两个 $\frac{N}{2}$ 点的序列 $x_1(r)$ 和 $x_2(r)$,

从而 N 点序列的离散傅里叶变换分解为两个 $\frac{N}{2}$ 点序列的离散傅里叶变换来实现。用序列

$X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 分别表示 $x_1(r)$ 、 $x_2(r)$ 的 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT, 即

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(r)] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3-69)$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(r)] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3-70)$$

所以

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3-71)$$

利用 $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ 和序列 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 隐含的周期性可以得到

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k=0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3-72)$$

这样将 N 点的序列 DFT 变换分解为计算两个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 变换 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$, 代入



(3-71) 式, 可以求得 $X(k)$ 前半 ($k=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$) 项数的结果, 再计算

(3-72) 式, 得到 $X(k)$ 的后半 ($k=\frac{N}{2}, \dots, N-1$) 项数的结果。

式(3-71)、(3-72)的运算可以用信号流程图表示出来, 如图 3.15 所示。图形形状如蝴蝶结, 我们称之为蝶形信号流程图。图中各支路的传递系数标注在支路的一侧, 没有标注系数时, 该支路系数为 1。

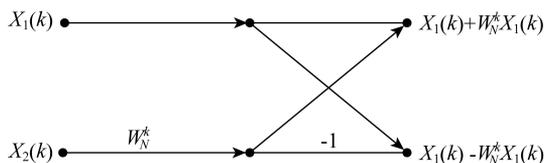


图 3.15 按时间抽选的蝶形运算流程图

采用这种算法, 将 $N=8$ 点的序列 $x(n)$ 的 DFT 的运算分解过程用图 3.16 表示。

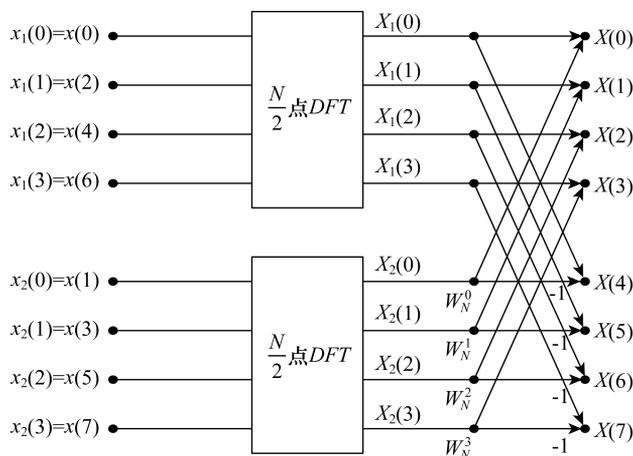


图 3.16 按时间抽选, 将 N 点 DFT 分解为 2 个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT

由前面分析可以看出, 每一个蝶形运算有一次复数乘法 $X_2(k) W_N^k$ 及两次复数加(减)法。按照蝶形运算的计算量, 可以得到一个 N 点的 DFT 分解为 2 个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 变换后, 直接计算 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT, 则每个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 需要 $\left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{4}$ 次复数乘法, $\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)$ 次的复数加法, 两个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 变换共需要 $2 \times \frac{N^2}{4} = \frac{N^2}{2}$ 次复数乘法和 $N\left(\frac{N}{2}-1\right)$ 次复数加法。另外, 把两个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 合成为 N 点的 DFT 时, 有 $\frac{N}{2}$ 个蝶形运算, 还需要 $\frac{N}{2}$ 次的复数乘法以及 N 次的复数加法。因此, 完成 N 点序列的一次分解后, 共需要 $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} \approx \frac{N^2}{2}$ 次复数乘法



和 $N\left(\frac{N}{2}-1\right)+N=\frac{N^2}{2}$ 次复数加法。对比直接计算 N 点的 DFT 和进行一次分解后的计算量，可以看出进行一次分解后的运算量减少了约一半。

由于 $N=2^M$ ，因而 $\frac{N}{2}$ 仍旧是偶数，可以进一步把每个 $\frac{N}{2}$ 点的子序列再按奇偶性分组为两个 $\frac{N}{4}$ 点的子序列。

将 $x_1(r)$ 进行分解为：

$$\begin{aligned} x_1(2l) &= x_3(l) \\ x_1(2l+1) &= x_4(l), \quad l=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4}-1 \\ X_1(k) &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l) W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l+1) W_{N/2}^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} \\ &= X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k), \quad k=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4}-1 \end{aligned} \quad (3-73)$$

且

$$X_1\left(k + \frac{N}{4}\right) = X_3(k) - W_{N/2}^k X_4(k), \quad k=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4}-1 \quad (3-74)$$

其中

$$\begin{aligned} X_3(k) &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} \\ X_4(k) &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} \end{aligned}$$

图 3.17 给出当 $N=8$ 时，将一个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 分解为 $\frac{N}{4}$ 点的 DFT，由这两个 $\frac{N}{4}$ 点的 DFT 组合成 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 的运算流程图。

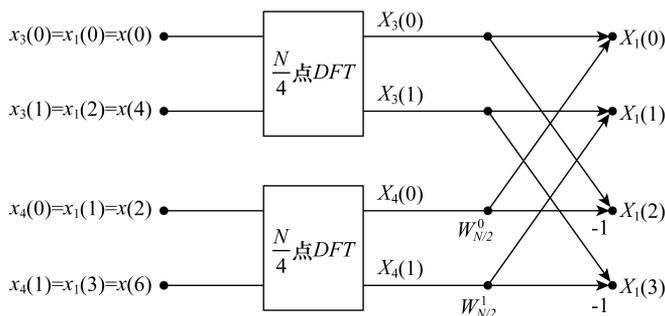


图 3.17 两个 $\frac{N}{4}$ 点的 DFT 组合成 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT



$x_2(r)$ 也可以进行同样的分解, 得到:

$$X_2(k) = X_5(k) + W_{N/2}^k X_6(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

$$X_2\left(k + \frac{N}{4}\right) = X_5(k) - W_{N/2}^k X_6(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

其中

$$X_5(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_5(l) W_{N/4}^{lk}$$

$$X_6(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_6(l) W_{N/4}^{lk}$$

按照定义式分别求取 $X_3(k)$, $X_4(k)$, $X_5(k)$, $X_6(k)$ 的数值, 得到 $N=8$ 序列的快速 FFT 运算的蝶形流程图, 如图 3.18 所示。

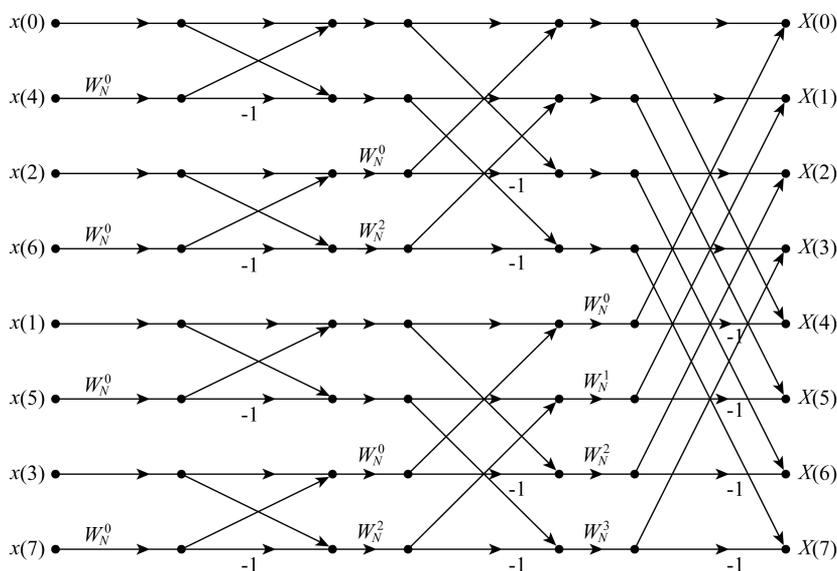


图 3.18 $N=8$ 时 DIT 的 FFT 运算流程图

2. 按时间抽选的 FFT 的运算规律与软件实现的方法

(1) 原位运算

由图 3.18 可以看出, DIT-FFT 运算很有规律。 $N=2^M$ 点的 FFT 由 M 级运算, 每级由 $\frac{N}{2}$ 个蝶形运算组成。同一级中, 每级蝶形运算的两个输入点只对计算本级的蝶形运算有用, 而且每个蝶形运算的输入、输出数据在同一条水平线上, 这就意味着计算完一个蝶形运算后, 所得到的输出数据可以立即作为下一级蝶形运算的输入数据, 因此可以将上一级蝶形运算的输出数据直接覆盖上一级蝶形运算的输入数据, 即将计算得到的输出数据存入原输入数据所占用的存储单元。这样经过 M 级蝶形运算后, 原来存放输入序列数据的 N 个存储单元便依次存放了 $X(k)$ 的 N 个数值。这种利用统一存储单元存储蝶形运算的输入、



输出数据的方法称为原位运算。

(2) 旋转因子的指数 r 的变化规律

N 点的 DIT-FFT 蝶形运算图中，每一级都有 $\frac{N}{2}$ 个蝶形，每一个蝶形都要乘以 W_N^r ，称其为旋转因子。但是蝶形运算级数不同 W_N^r 形式及循环方式也不同。用 m 表示由左向右的运算级数 ($m=1, 2, \dots, M$)，由图 3.18 可以看出，蝶形图中第 m 级共有 2^{m-1} 个不同的因子 W_N^r ，当 $N=2^3=8$ 时各级蝶形运算的各级旋转因子表示为

$$\begin{aligned} m=1 \text{ 时, } W_N^r &= W_{N/4}^p = W_{2^m}^p, \quad p=0 \\ m=2 \text{ 时 } W_N^r &= W_{N/2}^p = W_{2^m}^p, \quad p=0, 1 \\ m=3 \text{ 时 } W_N^r &= W_N^p = W_{2^m}^p, \quad p=0, 1, 2 \end{aligned}$$

对于 $N=2^M$ 的一般情况下，第 m 级的旋转因子为

$$W_N^r = W_{2^m}^p, \quad p=0, 1, 2, \dots, 2^{m-1}-1$$

由于

$$2^m = 2^M \times 2^{m-M} = N \times 2^{m-M}$$

所以

$$W_N^r = W_{2^m}^p = W_{2^M \times 2^{m-M}}^p = W_N^{p \times 2^{M-m}} \quad (3-75)$$

$$r = p \times 2^{M-m} \quad p=0, 1, 2, \dots, 2^{m-1}-1 \quad (3-76)$$

编程实现 DIT-FFT 时，旋转因子的确定可以按照式 (3-75)、(3-76) 进行计算。

(3) 蝶形运算规律

从图 3.18 中可以看出这种运算很有规律，其每一级 (每列) 计算都有 $\frac{N}{2}$ 个蝶形运算构成，每一个蝶形运算完成下述基本的迭代运算

$$\begin{aligned} X_m(k) &= X_{m-1}(k) + X_{m-1}(j) W_N^r \\ X_m(j) &= X_{m-1}(k) - X_{m-1}(j) W_N^r \end{aligned} \quad (3-77)$$

式 (3-77) 中， m 表示第 m 列迭代， k, j 表示数据所在的行数， $j-k$ 即为蝶形结的运算节点的距离，由图 3.18 可以看出 DIT 蝶形运算的蝶形结的运算两节点间的距离为 2^{m-1} 。式 (3-77) 的蝶形运算如图 3.19 所示。

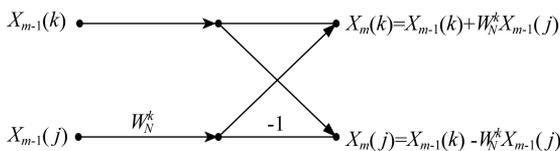


图 3.19 DIT 的蝶形运算结构图

(4) 倒位序规律

由图 3.18 可以看出，按照原位计算时，FFT 的输出 $X(k)$ 是按照顺序位输出的，即按照 $X(0), X(1), \dots, X(7)$ 的顺序排列，但这时输入序列 $x(n)$ 不是按自然顺序排列的，而是按 $x(0), x(4), \dots, x(7)$ 的顺序存入存储单元的，看起来杂乱无序，实际上是有规



律的，称之为倒位序。

造成倒位序的原因是输入序列按照序列标号的奇偶不断分组。这种不断分成偶数组序列和奇数组序列的过程可以用图 3.20 所示的二进制树状图来说明。

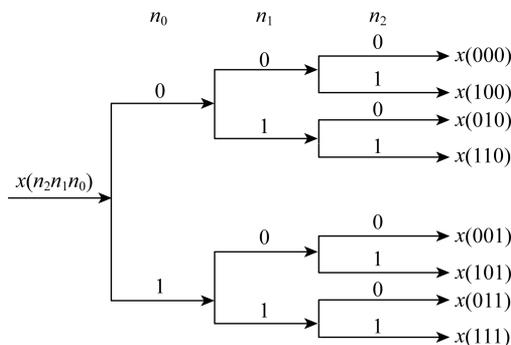


图 3.20 描述倒位序的二进制树状图

(5) 编程实现的思想

观察图 3.18，可以归纳出编程实现有用的规律：在第 m 级蝶形运算中，每个蝶形运算的两数据之间相隔 2^{m-1} 个点；同一旋转因子对应着 2^{M-m} 个蝶形结。

编程实现时，先从第一级(输入端)开始，逐级进行，共进行 M 级运算。在进行第 m 级运算时，依次求出 2^{m-1} 个不同的旋转因子，每求出一个旋转因子，就计算完它所对应的所有 2^{M-m} 个蝶形。这样，我们可以用三重循环实现 DIT-FFT 运算，程序框图如图 3.21。

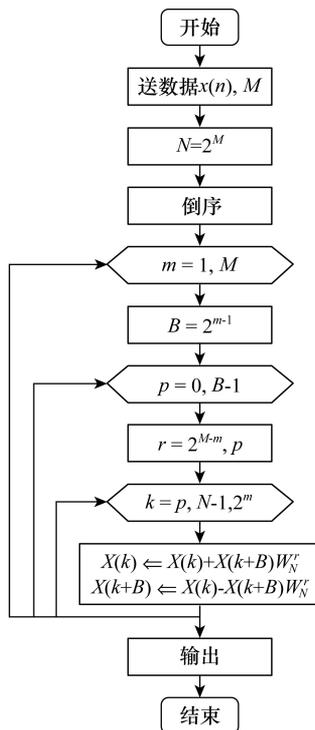


图 3.21 DIT-FFT 运算和程序框图





3.7.3 按频率抽选的基-2FFT 算法

1. 算法原理

这种按频率抽选(DIF)的基-2FFT 算法推导过程遵循两个规则:

- (1) 对时间进行前后分解;
- (2) 对频率进行奇偶分解。

设序列点数为 $N=2^M$, M 为正整数, 同按时间抽选(DIT)的基-2FFT 算法, 若不满足这个条件, 可以人为地加上若干个零值点, 达到这一要求。按规则(1)把输入序列按前一半、后一半分开(不是按偶数、奇数分开), 把 N 点 DFT 写成两部分。

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{nk} W_N^{k\frac{N}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{Nk/2} \right] \cdot W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-78) \end{aligned}$$

式(3-78)中, 用的是 W_N^{nk} , 而不是 $W_{N/2}^{nk}$, 因而这并不是 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT。

序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换中, 由于 $W_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j\pi k} = (-1)^k$, 所以式(3-78)可以写成

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-79)$$

按照 k 为奇数还是偶数将频域中序列 $X(k)$ 分成偶数组序列和奇数组序列。用 $X(2r)$ 表示偶数组序列, $X(2r+1)$ 表示奇数组序列, 则有

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] \right\} W_N^{2nr} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{nr} \quad (3-80a)$$

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{n(2r+1)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \right\} W_{N/2}^{nr} \quad (3-80b)$$

式(3-80)中 $r=0, 1, 2, \dots, N/2$, 式(3-80a)为序列 $x(n)$ 前一半与后一半序列值之和的 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT, 式(3-80b)为序列 $x(n)$ 的前一半与后一半序列值之差再与 W_N^n 之积的

$\frac{N}{2}$ 点的 DFT。

令

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) &= \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3-81)$$



即有

$$\begin{aligned}
 X(2r) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{nr} \\
 X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_{N/2}^{nr}
 \end{aligned} \quad r = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3-82)$$

式(3-81)式表示的运算关系可以用图 3.22 的蝶形运算来表示。

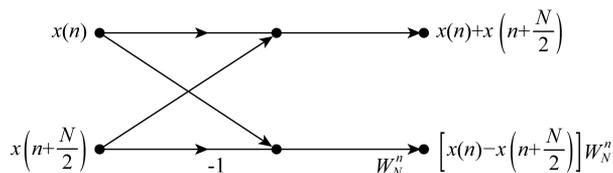


图 3.22 DIF 的蝶形运算示意图

按照上述算法，可以绘制得到 $N=8$ 点的序列的蝶形运算流程图，如图 3.23 所示。

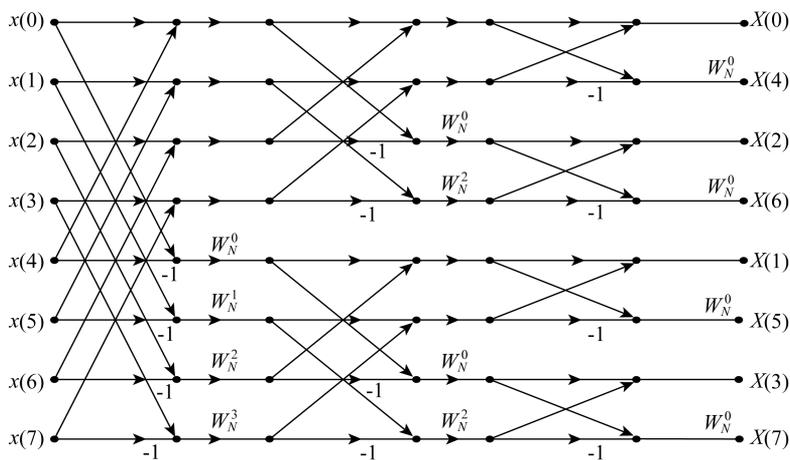


图 3.23 8 点序列的 DIF 的蝶形运算图

2. 按频率抽选的 FFT 的运算特点

(1) 原位运算

按频率抽选的基-2 快速算法特点与按时间抽选的算法基本相同。从图 3.23 可以看出它也是通过 $\frac{N}{2}$ 个蝶形运算完成，每个蝶形结构完成下述基本的迭代运算：

$$\begin{aligned}
 X_m(k) &= X_{m-1}(k) + X_{m-1}(j) \\
 X_m(j) &= [X_{m-1}(k) - X_{m-1}(j)] W_N^r
 \end{aligned} \quad (3-83)$$

式(3-83)中， m 表示第 m 列迭代， k 、 j 为数据所在的行数，式(3-83)的迭代运算如图 3.24 所示，与按时间抽选的算法一样，也是由一次复数乘法和两次复数加法组成，从图 3.23 看出这一流程图仍是原位运算。



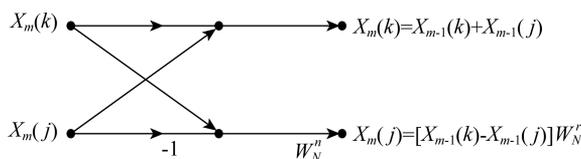


图 3.24 按频率抽选蝶形运算结构图

(2) 蝶形运算的距离

从图 3.23 看出，计算第 1 级(列)蝶形运算时($m=1$)，1 个蝶形的两个节点“距离”为 4；第 2 列时($m=2$)，蝶形的两个节点的“距离”为 2；第 3 列时($m=3$)，蝶形的两个节点的“距离”为 1。由于数据点数 N 与蝶形运算的级数 M 之间存在关系 $N=2^M$ ，所以可以推出蝶形运算的 2 个节点的“距离”为 2^{M-m} 。

(3) 旋转因子的指数 r 的确定

对于第 m 级蝶形运算，一个蝶形运算的两个节点间的“距离”为 2^{M-m} ，则式(3-83)的第 m 级的一个蝶形运算可以表示为

$$\begin{aligned}
 X_m(k) &= X_{m-1}(k) + X_{m-1}\left(k + \frac{N}{2^m}\right) \\
 X_m\left(k + \frac{N}{2^m}\right) &= [X_{m-1}(k) - X_{m-1}\left(k + \frac{N}{2^m}\right)] W_N^r
 \end{aligned}
 \tag{3-84}$$

对于不同级数(m)的迭代运算中旋转因子 W_N 的指数 r 如何确定，可以有严格的数学关系推导得到，在这里直接给出结论。确定 r 的方法为：

- (1) 将(3-84)式中蝶形运算的两个节点中的第一个节点标号(k 值)，表示成 M 位二进制数；
- (2) 将此二进制数左移($m-1$)位，把空出的位置补零；
- (3) 将该二进制数表示成十进制数，即得到旋转因子的指数 r 。

3. 按时间抽选和按频率抽选的 FFT 的区别

由图 3.18、3.23 可以看出 DIT 的 FFT 流程图中输入数据倒位序、输出自然序，而 DIF 的 FFT 流程图中输入自然序、输出倒位序，两者正好相反，但这并不是实质性区别，对于 DIF、DIT 法的 FFT 变换，都可以将输入与输出进行重排，使两者的输入或输出顺序成为自然序或倒位序。实质性的区别在于 DIF、DIT 的基本蝶形不同，复数乘法与复数加法的先后次序不同。

两种 FFT 算法的运算总量相同。当 $N=2^M$ 时，两种算法都有 M 级蝶形运算，每级有 $\frac{N}{2}$ 个蝶形组成，且每一个蝶形运算需要一次复数乘法、两次复数加法，因而 M 级蝶形运算总共需要 $\frac{N}{2} \log_2 N$ 次的复数乘法、 $N \log_2 N$ 复数加法运算。

两种 FFT 算法可以进行转换，将 DIT 的蝶形运算流程图进行转置就可以得到 DIF 的蝶形运算图。反之，亦然。



3.7.4 离散傅里叶反变换(IDFT)的快速计算

上面的FFT变换算法也同样适用于离散傅里叶反变换(IDFT)运算,即快速傅里叶反变换(IFFT)。离散傅里叶反变换的公式为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-85)$$

式(3-85)与离散傅里叶变换的公式区别在于 W_N 的指数是负的,将式(3-85)变换如下

$$x(n) = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{kn} \right]^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-86)$$

经过变换后,式(3-86)中 W_N 的指数变成了正的,与离散傅里叶变换的形式一样,就可以应用FFT变换的程序来计算IFFT了。用FFT求IDFT的步骤为:(1)对序列 $X(k)$ 取共轭;(2)对 $X^*(k)$ 进行FFT;(3)对变换后的序列取共轭,再乘以 $\frac{1}{N}$,即得 $x(n)$ 。

现在FFT算法的程序不少,也相当成熟,可以查阅相关手册或资料。

3.8 模拟信号的频谱分析

对模拟信号进行频谱分析,就是计算模拟信号的傅里叶变换。但模拟信号及其傅里叶变换都是连续函数,显然不能用计算机进行数值运算。而DFT(FFT)是一种时域、频域均离散化的变换,适合数值运算,因此需要通过时域采样把模拟信号变成时域离散信号,然后用DFT(FFT)进行频谱分析。

3.8.1 公式推导及参数选择

假设模拟信号 $x_a(t)$ 的持续时间(观察时间)为 T_0 ,它的傅里叶变换为

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3-87)$$

$X_a(j\Omega)$ 的最高频率是 f_h 。用高于 $2f_h$ 的采样频率 f_s 对该模拟信号进行采样,得到离散序列 $x_a(t) \Big|_{t=nT} = x_a(nT) = x(n)$,采样间隔为 T ,在时间区间 T_0 内共采样 N 点。对式(3-87)作零阶近似($t=nT$, $dt=T$)得到

$$X_a(j\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} \quad (3-88)$$

再对 $X_a(j\Omega)$ 进行等间隔采样,设在 $[0, f_s]$ 区间同样采样 N 点,采样间隔为 F_0 ,得到

$$F_0 = f_s/N = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_0} \quad (3-89)$$

将 $f=kF_0$ ($\Omega=k\Omega_0$)及式 $\Omega_0 T = 2\pi F_0/f_s = \frac{2\pi}{N}$ 代入(3-88)中,得到



$$X_a(jk\Omega_0) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x_a(nT)] \quad (3-90)$$

$$X_a(jk\Omega_0) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x(n)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-91)$$

式(3-91)表明由模拟信号时域采样得到 N 点采样序列, 经过 DFT(FFT), 再乘以 T , 就是模拟信号频谱在频域的采样。式中 $X_a(jk\Omega_0)$ 代表在 $[0, 2\pi]$ 区间上第 k 点的采样值。由式(3-91)还可以得到

$$x(n) = \frac{1}{T} \text{IDFT}[X_a(jk\Omega_0)], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-92)$$

式(3-91)和式(3-92)组成一对 DFT, 由 $X_a(jk\Omega_0)$ 经 DFT 反变换, 再除以 T , 得到原采样序列 $x(n)$ 。将 $X_a(jk\Omega_0)$ 、 $x(n)$ 分别代入频域插值公式和时域插值公式, 就可求得连续时间信号 $x(t)$ 的频谱函数 $X_a(j\Omega)$ 及 $x(t)$ 。

在对模拟信号进行频谱分析时, 有几个重要的参数要选择, 即采样频率 f_s 、频率分辨率 F_0 、频谱分析范围及采样点数 N 。采样频率 f_s 决定于信号的最高截止频率, 因此需要预先知道信号的最高截止频率 f_h 。 F_0 是频域的采样间隔, 是用 DFT 分析频谱时, 能够分辨的两个频率分量最小的间隔, 因此 F_0 称为频率分辨率。显然 F_0 应根据频谱分析的要求确定。信号的最高频率不应该超过 $f_s/2$, 因此频谱分析范围是 $[0, f_s/2]$ 。采样点数 N 和对信号的观察时间 T_0 有关, 但 T_0 又和频率分辨率有关。下面给出几个参考公式

$$f_s \geq 2f_h; \quad N_{\min} = 2f_h/F_0; \quad T_{\min} = 1/F_0 \quad (3-93)$$

为了使用 FFT, 要求采样点数 N 服从 2 的整数次幂。实际上, 模拟信号 $x_a(t)$ 一般为无限长, 既要提高频率分辨率, 又要照顾到频谱分析范围不减小, 必须增加观察时间 T_0 。

例 3-6 对模拟信号进行频谱分析, 要求频谱分辨率 $F_0 \leq 10\text{Hz}$, 信号最高频率 $f_h = 2.5\text{kHz}$ 。试计算

- (1) 最小的记录时间长度 $T_{0\min}$ 、最大采样间隔 T_{\max} 、最小采样点数 N_{\min} 及谱分析范围。
- (2) 如果信号的最高频率不变, 采样频率不能降低, 如何改变参数将频谱分辨率提高 1 倍?

解: (1) 由式(3-93)可得

$$T_{0\min} = 1/F_0 = 1/10 = 0.1\text{s}$$

$$T_{\max} = 1/2f_h = 1/(2 \times 2500) = 0.2\text{ms}$$

$$N_{\min} = 2f_h/F_0 = (2 \times 2500)/10 = 500$$

(2) 要将频率分辨率提高 1 倍, 采样频率不能降低, 只有通过增加时间, 增加采样点数实现。最小记录时间和最小采样频率计算如下

$$T_{0\min} = 1/(0.5 \times F_0) = 1/5 = 0.2\text{s}$$

$$N_{\min} = 2f_h/(0.5 \times F_0) = (2 \times 2500)/5 = 1000$$

实际中采样频率可以选择为信号最高频率的 3~4 倍, 采样点数要满足 2 的整数幂。

3.8.2 用 DFT(FFT) 对周期信号进行谱分析

如果模拟信号是周期信号, 经过时域采样得到时域离散周期信号, 简称周期序列。周



期序列的每一个周期中有相同数目的栅栏值，也就是说对模拟信号采样时，要求在模拟信号的每个周期的采样点数相同。将该周期序列截取长度为整数倍周期的一段，进行 DFT (FFT)，可以得到模拟信号的频谱。

假设由模拟信号采样得到周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，其周期为 N ，对 $\tilde{x}(n)$ 进行傅里叶变换，得到 $\tilde{x}(n)$ 的频谱为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \quad (3-94)$$

式(3-94)中， $\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)]$ 。

由式(3-94)可以看出，以 N 为周期的周期序列有 N 次谐波，可用主值区 $[0, 2\pi]$ 上的 N 条谱线表示。第 k 条谱线位于 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 处，谱线的强度为 $\frac{2\pi}{N}\tilde{X}(k)$ 。

如果截取 $\tilde{x}(n)$ 的主值区，得到 $x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$ ，再对 $x(n)$ 进行 N 点 DFT，得到

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \tilde{X}(k)R_N(k)$$

因此，可以截取 $\tilde{x}(n)$ 的主值区，作 N 点 DFT，用得到的 $X(k)$ 表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱的有效频谱成分。

如果截取 $\tilde{x}(n)$ 的 m 个周期，长度为 $M = mN$ ，得到 $x_M(n) = \tilde{x}(n)R_M(n)$ ，并对它进行 M 点的 DFT，得到 $X_M(k) = \text{DFT}[x_M(n)]$ ， $X_M(k)$ 也可以表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱。

对于模拟周期信号用 DFT(FFT)作谱分析，仍然要求截取的长度是周期的倍数。另外采样频率的取值要满足采样定理，满足每个周期中采样点数相等，这样得到的序列才是周期序列。

如果对于模拟信号或者序列截取的一段不是周期的整数倍，则会出现非常大的谱分析误差。

例 3-7 已知模拟信号 $x_a(t) = \cos(2\pi ft + \varphi)$ ，其中 $f = 2\text{kHz}$ ， $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ，试用 DFT 分析信号频谱。

解：这是一个周期信号，信号周期为 $T_0 = 1/f = 1/2000 = 0.5\text{ms}$ 。对信号进行采样的最小采样频率为 $f_{\text{min}} = 2f = 4\text{kHz}$ ，取采样频率为 16kHz ，并且取采样时间为一个周期，即 0.5ms ，采样点数为 $N = 16\text{kHz}/2\text{kHz} = 8$ ，即一个周期中取 8 点，采样后序列可以用下式表示

$$x(n) = x_a(t) \Big|_{t=nT} = \cos\left(2\pi fn/f_s + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$X(k) = T \sum_{n=0}^7 x(n) W_8^{nk} = T \sum_{n=0}^7 \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right) e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$$

对上式可以进行 8 点的 DFT 计算，得到 $X(k)$ ，它的幅度曲线如图 3.25a 所示。8 点的



数字频率为 $\omega_i = \frac{2\pi}{8}k$, $i=0, 1, 2, \dots, 7$; 对应的模拟频率为 $f_i = \omega_i f_s / 2\pi = 2ik\text{kHz}$ 。当 $i=0, 1, 2, \dots, 7$ 时, 具体的模拟频率为 $f_i = 0, 2, 4, \dots, 14\text{kHz}$ 。信号刚好在 $f = 2\text{kHz}$ ($k = 1$) 的谱线上。

如果对该周期信号不按照周期的倍数截取, 假设取 0.75ms 。仍按 $f_s = 16\text{kHz}$ 进行采样, 共采样 12 点, 作 12 点 DFT, 得到 $X(k)$ 的幅度曲线如图 3.25b 所示。

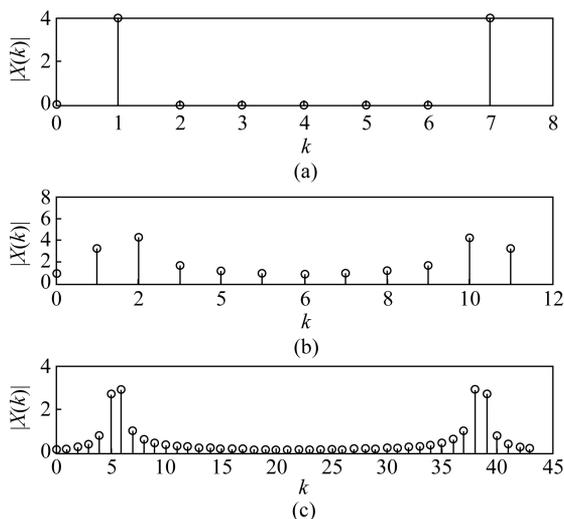


图 3.25 频谱曲线图

由图 3.25 可以看到频谱图不再是一条谱线, 和理论曲线有较大的差别, 如果用该波

形确定余弦波的频率, 则只能进行估计。算出 $k=1$ 的模拟频率是 $f = \frac{2\pi}{12} \times 1 \times 16 = 1.33\text{kHz}$, $k=2$ 的模拟频率是 $f = 2.667\text{kHz}$ 。如果用最大幅度值确定, 则 $f = 2.667\text{kHz}$, 显然误差很大。这种现象就是长序列截断后形成的截断效应。

如果只知道信号是周期信号, 而不知道信号的周期, 可以取观察时间长一些, 这样可以减少截断效应的影响。例如在例题 3-7 中, 取 45 点, 但信号频率很明显是 $k=5, 6$ 处, 算出对应的模拟频率是 1.82kHz 和 2.18kHz , 如果按最大幅度确定, 估计信号的频率是 2.18kHz , 相对误差要比取 12 点小一些, 其频谱曲线如图 3.25c 所示。

3.8.3 用 DFT(FFT) 对模拟信号进行谱分析的误差

1. 频谱混叠

如果对信号采样时不满采样定理, 即不满足 $f_s \geq 2f_h$, 会在 $f_s/2$ 附近引起频谱混叠, 造成频谱分析误差。一般模拟信号只要有不连续点, 它的频谱函数总会拖着很长的尾巴, 并不是陡截止的, 因此, 采样频率要选择的适当高一些, 但总还会存在轻微的频谱混叠。另外, 信号中总会或多或少的有干扰或噪声, 这也是引起频谱混叠的原因。在进行谱分析



时, 应该注意因频谱混叠引起的误差。

2. 截断效应

模拟信号的傅里叶变换是在 $(-\infty, +\infty)$ 区间上的一种积分运算, 实际中观察到的模拟信号一般是有限长的, 没有观察到的那部分只能认为是零, 这相当于将模拟信号截取一部分进行分析。即使能得到无限长的模拟信号, 也只能截断, 因为 DFT 是一种有限点的离散傅里叶变换。因截断引起的误差现象称为截断效应。下面进行分析。

假设对模拟信号进行采样得到采样序列 $x(n)$, 对它截取一段, 长度为 N , 得到采样序列

$$x_N(n) = x(n)R_N(n) \quad (3-95)$$

式(3-95)中, $R_N(n)$ 起对信号截断的作用。对上式进行傅里叶变换, 得到

$$X_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega}) * R_N(e^{j\omega}) \quad (3-96)$$

式(3-96)中

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$R_N(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} = R_N(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-97)$$

式(3-97)中

$$R_N(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

矩形窗函数的频谱幅度 $R_N(\omega)$ 如图 3.26 所示, 它有一个主瓣, 主瓣旁边有许多旁瓣, 主瓣的宽度为 $\frac{4\pi}{N}$ 。显然因为信号的频谱与矩形窗的频谱函数进行卷积, 使截断后的信号的频谱波形不同于原来的频谱, 产生了误差。例如, $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 、 $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$, 它的理论频谱应该是在 $\pm\omega_0$ 处的两条谱线, 并以 2π 为周期进行延拓, 波形如图 3.27(a), 用矩形窗将它截断后的序列的幅度谱如图 3.27(b)。比较截断前后的两信号的幅度谱, 主要有两方面的差别。

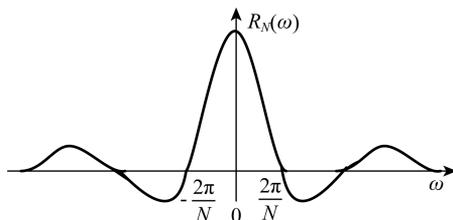


图 3.26 矩形窗的频谱幅度

(1) 频谱泄露。进行截断处理后信号的离散谱线向两边展宽, 展宽的宽度和矩形窗的长度有关, 一般矩形窗的长度越长, 展宽就越窄。这种将谱线展宽的现象称为谱线泄露。



泄露会使谱线模糊，谱的分辨率降低。如果有两个信号的中心频率离的很近，在频域会因为泄露现象使两个信号分辨不开，降低了谱分辨率。

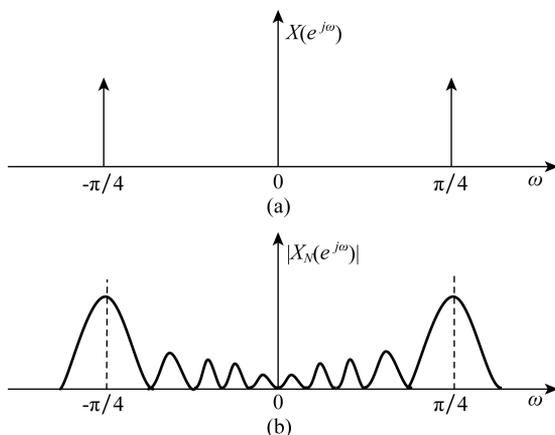


图 3.27 $x(n) = \cos\omega_0 n$ 加矩形窗前、后的频谱幅度

(2) 谱间干扰。因为矩形窗函数的频谱存在很多旁瓣，和主信号卷积以后形成了许多旁瓣，这些旁瓣起着谱间干扰的作用，假设观察信号中有两个不同频率的信号，即一个强信号一个弱信号，因为谱间干扰，可能强信号的旁瓣掩盖了弱信号的主瓣，这就忽略了弱信号的存在。或者弱信号根本不存在，误把强信号的旁瓣看成一个信号，造成假信号。一般情况下谱间干扰也起着降低谱分辨率的作用。频谱泄露和谱间干扰统称为信号的截断效应。

如何减轻截断效应，提高谱分析的分辨率即精确度是一个重要的问题。可以通过改变窗函数的形状，通过窗函数主瓣的能量，压低旁瓣的幅度，减轻谱间干扰，但这样会增加主瓣的宽度，又会减小谱的分辨率。有关各种窗函数的问题可参考 6.3 节介绍的 FIR 滤波器。

3. 栅栏效应

一般信号的频谱是频率的连续函数(周期信号除外)，但用 DFT(FFT) 计算出的频谱是离散谱，当 DFT 的点数较多时，离散谱的包络才接近于信号的频谱，这只能是近似的。 N 点 DFT(FFT) 得到的只是 N 个采样点的频谱值，两点之间的频谱值是不知道的，就好像被栅栏遮住一样，因此这种现象被称为栅栏效应。为了减轻栅栏效应可以增加 DFT(FFT) 的变换点数，即对信号频谱进行更多点的采样。如果采样点数不能再增多，可以通过信号的尾部加零的方法加大 DFT(FFT) 的变换点数。

用 DFT(FFT) 对采样序列进行频谱分析的误差，除了可能产生频谱混叠现象以外，截断效应和栅栏效应和模拟信号的情况一样，不再重复。

对连续信号的谱分析中，主要关心两个指标，一个是前面介绍的分辨率，另一个是谱分析范围。如果采样频率 f_s 一定，为了不产生频谱混叠，要求信号的最高频率 $f_h \leq 0.5f_s$ ，因此对模拟信号进行谱分析范围为 $0 \sim 0.5f_s$ 。如果扩大频谱分析范围，只有增加采样频率。



3.9 DFT 的矩阵表示与 DFT、FFT 的 MATLAB 实现

3.9.1 DFT 的矩阵表示

有限长序列的离散傅里叶变换 DFT 也可以用矩阵形式表示, DFT 定义式

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

可以表示成向量形式 $X = Dx$ 。其中, 向量 X 由频域序列 $X(k)$ 的 N 个 DFT 的系数构成, 即

$$X(k) = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$$

向量 x 由时域序列 $x(n)$ 的 N 个样本值构成, 即

$$x = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$$

系数矩阵 D 是由离散傅里叶变换的系数 W_N^{nk} 构造成的 $N \times N$ 的 DFT 矩阵, 表示为

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \quad (3-98)$$

离散傅里叶反变换的定义式 $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$ 表示成矩阵的形式为

$$x = D^{-1}X$$

其中, D^{-1} 是由离散傅里叶反变换的系数 W_N^{-nk} 构造成的 $N \times N$ 的 IDFT 矩阵

$$D^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \quad (3-99)$$

比较(3-98)、(3-99)式可以求得

$$D^{-1} = \frac{1}{N} D^* \quad (3-100)$$

从序列的离散傅里叶变换的矩阵形式可以看出, 对于相同长度的时域序列经过相同的变换矩阵 D 变换, 得到频域相应的序列 $X(k)$, 如果对于长度为 $N=4$ 的序列, 经过式(3-98)变换得到 4×4 的 DFT 变换矩阵 D 为





$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

例如当序列 $x(n) = \{2, 3, 3, 2\}$; $n=0, 1, 2, 3$, 时, 可以按照式 $X=Dx$ 求得

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1-j \\ 0 \\ -1+j \end{bmatrix}$$

以矩阵形式表示序列的 DFT, 可以更清楚地理解序列的变换, 实质上就是数学意义上的映射, 即将序列从一个域映射到另一个域, 从而实现更有效地信号表达, 更有利于信号分析和处理。

3.9.2 用 MATLAB 计算序列的 DFT

根据上述 DFT 和 IDFT 的矩阵表示式, 可以直接利用 MATLAB 矩阵运算求取序列的 DFT 或 IDFT。但直接计算 DFT 计算量很大, 计算速度太慢。下面介绍 MATLAB 函数 FFT 实现快速傅里叶变换算法。

MATLAB 提供了用快速傅里叶变换算法 FFT 计算 DFT 的函数 FFT, 其调用格式如下

$$Xk = \text{FFT}[x, N]$$

调用参数 x 为被变换的时域序列向量, N 是 DFT 变换区间长度, 当 N 大于 x 的长度时, FFT 函数自动在序列 x 后面补零。函数返回 x 的 N 点 DFT 变换结果向量 Xk 。当 N 小于 x 的长度时, FFT 函数计算的前面 N 个元素构成的 N 长序列的 N 点 DFT, 忽略 x 后面的元素。

IFFT 函数计算 IDFT, 其调用格式与 FFT 函数相同。

例 3-8 设 $x(t) = \cos(0.48\pi t) + \cos(0.52\pi t)$, 取采样间隔 $T=1s$, 采样点数为 $N=100$

- (1) 对 $x(t)$ 进行采样得到序列 $x(n)$, 求其 FFT 变换;
- (2) 将(1)中序列 $x(n)$ 补零补至 200 点, 求其 FFT 变换;
- (3) 数据采样点数为 200 点, 即 $0 \leq n \leq 199$, 分析高密度频谱与高分辨率频谱之间的差异。

% Program3- 18a

```
N1=100; T=1; % 采样点数与采样间隔
n1=0:N1-1; t=n1*T; % 时间序列
x=cos(2*pi*0.24*t)+cos(2*pi*0.26*t); % 离散化后的离散信号
figure(1);
n1=0:N1-1; y1=x(1:1:100)
subplot(2,3,1)
stem(n1,y1);
title('时域离散信号 x(n)');
xlabel('n');
```



```

hold on;
axis([0 100 -4 4]); %确定坐标系
Y1 = fft(y1); magY1 = abs(Y1(1:1:51));
k1 = 0:1:50; w1 = 2*pi/100*k1;
subplot(2, 3, 4)
stem(w1/pi, magY1);
title('幅度')
xlabel('频率/rad')
% Program3- 15b
N2 = 200; N1 = 100; T = 1; %采样点数与采样间隔
n1 = 0:N1 - 1; t = n1*T; %时间序列
n2 = 0:N2 - 1;
x = cos(2*pi*0.24*t) + cos(2*pi*0.26*t); %离散化后的离散信号
y2 = [x(1:100), zeros(1, 100)] %将序列补零至 200 点
subplot(2, 3, 2); stem(n2, y2); hold on;
axis([0 200 -2.5 2.5]); %确定坐标系
title('含有 100 个零点离散信号');
xlabel('时间/s');
Y2 = fft(y2); magY2 = abs(Y2(1:1:101));
k2 = 0:1:100;
w2 = 2*pi/N2*k2;
subplot(2, 3, 5)
stem(w2/pi, magY2);
title('含有 100 个零点信号的 FFT');
xlabel('频率/rad')
% Program3- 15c
n = 0:N2 - 1; t = n*T; %时间序列,采用 200 个数据点
x = cos(2*pi*0.24*t) + cos(2*pi*0.26*t); %时域离散信号
subplot(2, 3, 3);
stem(n, x); hold on;
title('200 点时域信号'); xlabel('时间/s');
Y3 = fft(x); magY3 = abs(Y3(1:1:101));
k3 = 0:1:100;
w3 = 2*pi/N2*k3;
subplot(2, 3, 6)
stem(w3/pi, magY3);
title('200 点信号的 FFT');

```





xlabel('频率/rad')

程序执行结果图 3.28 所示。

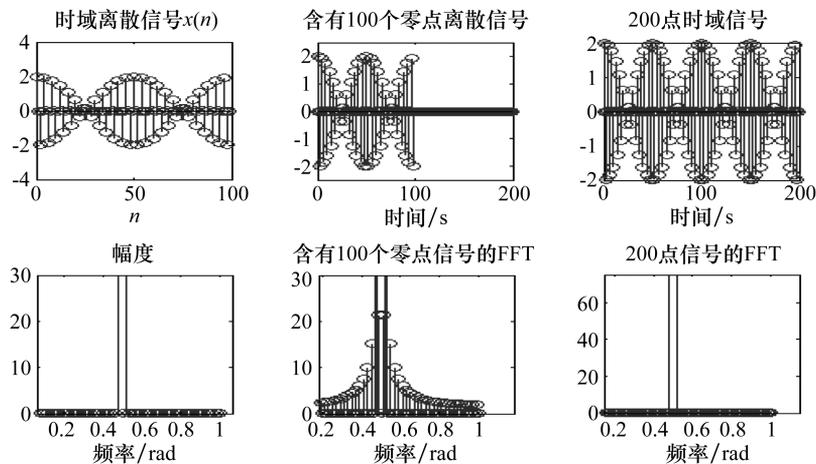


图 3.28 程序运行结果

本章小结

本章在介绍了傅里叶变换的几种形式的基础上,从周期序列的傅里叶级数变换开始介绍了周期序列的傅里叶级数变换及其性质。周期序列的傅里叶级数(DFS)变换不同于连续周期信号的傅里叶变换,两者在表现形式上相同,但是离散傅里叶级数的谐波成分只有 N 个,而连续傅里叶级数有无穷多个谐波成分。周期序列实际上只有有限个序列值有意义,从它和有限长序列的本质联系出发,由周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数(DFS)变换得出了有限长序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换(DFT)的定义及其物理意义,并详细阐述了有限长序列的离散傅里叶变换的性质,讨论了离散傅里叶变换(DFT)与周期序列的傅里叶级数变换(DFS)、序列的傅里叶变换(DTFT)和序列的 z 变换之间的关系。

直接计算 N 点序列的DFT,复数乘法与复数加法的次数都与 N^2 成正比,当 N 很大时,运算量很大,不利于信号的实时处理。利用DFT的对称性和周期性,合并DFT运算中可以合并的项,将长序列的DFT变成短序列的DFT进行运算,可以大大减少运算量,提高运算速度。本章在讨论直接计算离散傅里叶变换的基础上,详细介绍了基-2按时间抽选(Decimation-in-Time)的FFT算法和基-2按频率(Decimation-in-Frequency)抽选的FFT算法和具体的实现方法,以及离散傅里叶反变换的快速计算方法等。

本章在最后介绍了频域采样定理和模拟信号的频谱分析以及DFT、FFT的MATLAB实现。快速傅里叶变换FFT在数字信号处理中有着广泛地应用,特别是在信号的频谱分析和线性卷积运算中,应用FFT处理非常方便。



第3章课件



习题

1. 序列 $x(n)$ 为

$$x(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3)$$

(1) 计算 $x(n)$ 的 5 点的离散傅里叶变换;

(2) 如果满足条件 $Y(k) = X^2(k)$, 求 $y(n) = \text{IDFT}[Y(k)]$ 。

2. 已知序列 $x(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$, $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 6 点 DFT。

(1) 如果有限长序列 $y(n)$ 的 6 点的 DFT 是 $Y(k) = W_6^{4k} X(k)$, 求 $y(n)$ 及 $z_n = x(n) * y(n)$;

(2) 如果有限长序列 $w(n)$ 的 6 点的离散傅里叶变换 $W(k) = \text{Re}[X(k)]$, 求 $w(n)$;

(3) 如果有限长序列 $p(n)$ 的 3 点的离散傅里叶变换 $P(k) = X(2k+1)$, 求 $p(n)$ 。

3. 已知有限长序列

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$$

(1) 计算序列 $x(n)$ 的 10 点的 DFT。

(2) 如果序列 $y(n)$ 的离散傅里叶变换为

$$Y(k) = e^{j2k\frac{2\pi}{10}} X(k)$$

式中 $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换, 求序列 $y(n)$ 。

(3) 如果 10 点序列 $y(n)$ 的离散傅里叶变换为

$$Y(k) = X(k) W(k)$$

式中 $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换, $W(k)$ 是 $x(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{其他 } n \end{cases}$$

求序列 $y(n)$ 。

4. 已知有限长复数序列 $f(n)$ 由两个有限长实数序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 组成, 即 $f(n) = x(n) + jy(n)$, 其离散傅里叶变换 $\text{DFT}[f(n)] = F(k)$, 试求取 $F(k)$ 为下式时 $X(k)$, $Y(k)$ 以及 $x(n)$, $y(n)$, 式中 a, b 为实数。

$$(1) F(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$$

$$(2) F(k) = 1 + jN$$

5. 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 。现将序列 $x(n)$ 补零值使其变成长度为 rN 点的序列 $y(n)$

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

试求 rN 点序列的 $\text{DFT}[y(n)]$, 并分析与序列 $X(k)$ 之间的关系。



第 5 题答案解析

6. 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 。现将序列 $x(n)$ 的每两个序列值之间插入 $r-1$ 个零值点, 得到 rN 点的序列 $y(n)$

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n=ir, i=0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试求 rN 点序列的 $\text{DFT}[y(n)]$, 并分析与序列 $X(k)$ 之间的关系。

7. 已知模拟信号 $x_a(t) = \cos(2\pi \times 1000t + \theta)$, 现在以 $T = 0.25\text{ms}$ 进行等间隔采样, 设定采样开始时间 $t=0$, 采样点数为 N 点。

(1) 求采样频率及数字角频率, 并写出采样序列的数学表达式;

(2) 模拟信号 $x_a(t)$ 的初相位 θ 的值是否会造成采样失真, 分析原因。

(3) 对 $x(n)$ 进行 N 点的 DFT 变换, 当 N 取哪些值时, 得到的 DFT 的结果是精确的。

8. 已知序列 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-4) + 3\delta(n-5)$, $y(n) = R_4(n)$, 求取

(1) $z(n) = x(n) * y(n)$

(2) $f(n) = x(n) \textcircled{5} y(n)$ (5 点圆周卷积), 分析 $z(n)$ 和 $f(n)$ 哪些点的序列值相等。

9. 设 $\tilde{x}(n)$ 是一个周期为 N 的周期序列, 则它也是周期为 $2N$ 的周期序列。将 $\tilde{x}(n)$ 看作周期为 N 的周期序列, 其 DFS 变换为 $\tilde{X}_1(k)$ 。再将 $\tilde{x}(n)$ 看作周期为 $2N$ 的周期序列, 其 DFS 变换为 $\tilde{X}_2(k)$ 。试用 $\tilde{X}_1(k)$ 表示 $\tilde{X}_2(k)$ 。

10. 设序列 $x(n) = R_{15}(n)$ 、 $h(n) = R_5(n)$, 应用 MATLAB 编写实现二序列线性卷积和圆周卷积的程序, 并验证应用圆周卷积代替线性卷积的条件是 $L \geq N+M-1 = 19$ 。

11. 设模拟信号为 $x(t) = 0.5\sin(6\pi t) + \cos(20\pi t)$, 对该信号进行等间隔采样, 采样间隔为 $T = 0.02\text{s}$, 采样点数为 512。应用 FFT 变换对该信号进行滤波, 将频率为 7~15Hz 的成分滤去, 绘制滤波前后信号的振幅谱以及滤波后的时域信号。



第 6 题答案解析



第 7 题答案解析



第 9 题答案解析