# 第二章 》

# 非线性方程求根

【本章重点】非线性方程 $f(x)=0$ 求根的几种方法，如二分法、简单迭代法、牛顿(Newton)迭代法、弦割法等

【本章难点】迭代法的收敛性

在自然科学研究和工程技术应用中，经常会遇到非线性问题。比如求解曲线与直线交点这样简单的数学问题，设曲线方程为 $y=\sin x$，直线方程为 $y=ax+b$($a$，$b$ 均为常数)，且二者有交点，在大多数情况下，仍然很难解析求出非线性方程 $\sin x=ax+b$ 的解 $x$。对于非线性问题的求解，一般采用的方法是将其简化或转化为线性问题进行求解，但是解的精确性常常得不到保证。随着数学理论的日趋完善以及计算机的广泛普及，人们开始使用计算机来求解非线性问题，力求得到更符合实际的结果。因此，对非线性方程(组)的求解问题一直是人们研究的一个热点课题之一。

单变量非线性方程的一般可表示为

$$f(x)=0 \tag{2-1}$$

式中，$x\in\boldsymbol{R}$，$f(x)\in C[a, b]$。

如果 $f(x)$ 为多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$，称方程(2-1)为代数方程或 $n$ 次多项式方程。如果 $f(x)$ 为一般连续函数时，称方程(2-1)为超越方程。

非线性方程 $f(x)=0$ 的解 $x^*$，满足 $f(x^*)=0$，通常称 $x^*$ 是方程的根，也叫做函数 $f(x)$ 的零点。方程的根包括实根和复根，本章只讨论实根的求法。

关于非线性方程求根，一般要研究下列三个问题：

(1) 根的存在性。首先要确定在一个有限区间内，非线性方程至少有一个根。

(2) 根的隔离。确定根所在的区间就是根的隔离。隔根区间是指在某些区间内，函数 $y=f(x)$ 和 $x$ 轴只有一个交点。隔根区间内的任一点都可看做该根的一个近似值。

(3) 根的精确化。找出根的近似值后，逐步把根精确化，直到满足精度要求。

根的逐步精确化的方法，主要包括二分法、迭代法、牛顿法和弦割法等，这些方法无论是对代数方程或是超越方程都是适用的。

# 第一节　根的隔离与二分法

## 一、求隔根区间的一般方法

在求非线性方程 $f(x)=0$ 的近似根时，首先要确定出若干个区间，使得在每个区间内 $y=f(x)$ 与 $x$ 轴有且只有一个交点，这个过程就叫做**“根的隔离”**。

由高等数学中可知，若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，即 $f(a)$、$f(b)$ 异号，则方程 $f(x)=0$ 在 $[a, b]$ 内至少有一个根。若 $f(x)=0$ 在区间 $[a, b]$ 内还严格单调，则 $f(x)=0$ 在 $[a, b]$ 内只有一个根。

对于一般方程来说，求隔根区间的方法通常有如下两种：

（1）作图法。画出 $y=f(x)$ 的简图，根据曲线 $y=f(x)$ 与 $x$ 轴交点的大概位置来确定隔根区间。也可以利用导函数 $f'(x)$ 的正、负与函数 $f(x)$ 的单调性的关系确定根的大致位置。若 $f(x)$ 比较复杂，也可以将方程等价变形为 $\varphi(x)=\psi(x)$，画出函数 $y=\varphi(x)$ 和 $y=\psi(x)$ 的简图，由两条曲线交点的横坐标的位置来确定根的隔根区间。

（2）逐步搜索法。先确定方程 $f(x)=0$ 的所有实根所在区间 $[a, b]$，再按照选定的步长 $h=(b-a)/n$（$n$ 为正整数），依次取点 $x_k=a+kh$（$k=0, 1, \cdots n$），并计算各点的函数值 $f(x_k)$，最后根据函数值异号和实根的个数来确定隔根区间。在搜索过程中，可根据实际情况调整步长 $h$，直到把隔根区间全部找出。

**例 2-1**　判断方程 $3x-\cos x=1$ 有几个实根，并求出其隔根区间。

**解：**用作图法。为了方便作图，首先将方程进行等价变形，得

$$3x-1=\cos x$$

令 $y_1=3x-1$，$y_2=\cos x$，并作出这两个函数的图形，如图 2-1 所示。通过观察得知，$y_1=3x-1$ 和 $y_2=\cos x$ 只有一个交点，说明原方程 $3x-\cos x=1$ 仅有一个实根。通过图形可以判断，其隔根区间为 $[0.5, 1]$。

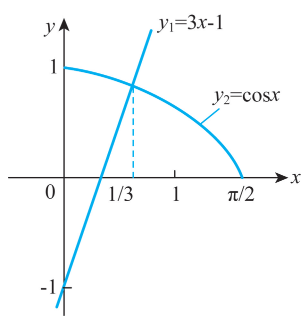


图 2-1　$y_1=3x-1$ 和 $y_2=\cos x$ 的图形

**例 2-2**　利用逐步搜索法，确定方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 的一个根的隔根区间。

**解：** 根据方程可得，$f(0)=-1<0$，$f(2)=5>0$，说明 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内至少有一个实根。设从 $x=0$ 出发，取 $h=0.5$ 为步长，向右进行根的搜索，并依次判断 $f(x)$ 值的正负号，如表 2-1 所示。

**表 2-1　例 2-2 中根的搜索过程**

| $x$ | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ 的符号 | − | − | − | + | + |

通过分析可以得出，方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $[1.0, 1.5]$ 内必有一个实根。

采用逐步搜索法来确定隔根区间，关键在于步长 $h$ 的确定。只要步长 $h$ 的值取得足够小，就可以利用这种方法得到具有任意精度的近似根。然而，选取步长较小时，就会造成搜索的步数相应增多，导致计算量加大。因此，对于精度要求比较高的情况，只采用逐步搜索方法是不适宜的。

## 二、二分法

如果非线性方程(2-1)中的 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且严格单调，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则非线性方程 $f(x)=0$ 在 $[a, b]$ 内一定有一个实根。区间 $[a, b]$ 为方程 $f(x)=0$ 的有根区间。此时可以使用二分法求出该单根。

二分法的基本思想是：逐步将有根区间 $[a, b]$ 二等分，通过判别区间端点的函数值符号，进一步搜索有根区间，使得有根区间的长度缩小到充分小，从而求出满足给定的精度要求的根的近似值。

利用二分法求解方程(2-1)单根的具体步骤是：

(1) 计算 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 端点处的值 $f(a)$ 和 $f(b)$。

(2) 计算 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的中点 $x_0=(a+b)/2$ 处的值，计算中点的函数值 $f(x_0)$。

(3) 判断，如果 $|f(x_0)|\leq\eta$，$\eta$ 是预先给定的精度。则方程的实根就是 $x^*=x_0=(a+b)/2$，停止计算。否则，如果 $|f(x_0)|>\eta$，则 $f(x_0)$ 或者与 $f(a)$ 异号，或者与 $f(b)$ 异号。

① 若 $f(a)f(x_0)<0$，说明根在区间 $[a, (a+b)/2]$ 内，这时取 $a_1=a$，$b_1=(a+b)/2$。

② 若 $f(x_0)f(b)<0$，说明根在区间 $[(a+b)/2, b]$ 内，这时取 $a_1=(a+b)/2$，$b_1=b$。

注意：无论出现哪种情形，新的有根区间 $[a_1, b_1]$ 的长度仅为原有根区间 $[a, b]$ 的一半。

(4) 若 $|b-a|<\varepsilon$（$\varepsilon$ 为精度要求），计算终止，此时 $x^*=(a+b)/2$，否则转(2)。

以后的计算就是在新的有根区间 $[a_1, b_1]$ 上重复上述二分步骤，得到下列有根区间序列

$$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots\supset[a_k, b_k]\supset\cdots$$

其中每个区间仅为前一个区间的一半，二分 $k$ 次以后得有根区间 $[a_k, b_k]$，其长度是

$$b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b-a)$$

由此可见，如果二分过程无限地进行下去($k\to\infty$)，则有根区间必定收敛于一点 $x^*$，该点就是所求的根。但在实际计算时，只要我们能获得满足给定精度要求的近似值就可以了，没有必要也不可能去完成这种无穷过程。

若令有根区间$[a_k, b_k]$的中点 $x_k=(a_k+b_k)/2$ 为 $x^*$ 的近似值，则在逐次二分的过程中，就得到以 $x^*$ 为极限的近似根序列 $x_0$，$x_1$，$x_2$，…，$x_k$，…，可以写出其误差估计式

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{1}{2}(b_k-a_k)=\frac{1}{2^{k+1}}(b-a) \tag{2-2}$$

对于预先给定的精度 $\varepsilon>0$，只要

$$k>\frac{\ln(b-a)-\ln(2\varepsilon)}{\ln 2} \tag{2-3}$$

则有 $|x^*-x_k|<\varepsilon$，这时，$x_k$ 就是满足精度要求的近似值。

**例 2-3** 用二分法求解例 2-2 中方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在区间$[1, 1.5]$内的一个实根，要求误差不超过 0.005。

**解：** 首先计算 $f(x)=x^3-x-1$ 在有根区间$[1, 1.5]$端点处的值，即

$$f(1)=-1<0,\ f(1.5)=0.875>0。$$

且 $\forall x\in[1, 1.5]$，$f'(x)=3x^2-1>0$，即 $f(x)$ 在区间$[1, 1.5]$上单调连续。因此，$f(x)$ 在区间$[1, 1.5]$上只有一个根。

取区间$[1, 1.5]$的中点 $x_0=(1+1.5)/2=1.25$，计算 $f(x_0)=f(1.25)<0$，即 $f(1)$ 和 $f(1.25)$ 同号，则所求的根 $x^*$ 一定在区间$[1.25, 1.5]$上。这时，令 $a_1=(a+b)/2=1.25$，$b_1=b=1.5$，从而得到一个新的有根区间$[a_1, b_1]$。

如此反复二分下去，具体计算结果见表 2-2 所示。

**表 2-2　例 2-3 的计算结果**

| $k$ | $a_k$ | $b_k$ | $x_k$ | $f(x_k)$的符号 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.5000 | 1.2500 | − |
| 1 | 1.2500 | 1.500 | 1.3750 | + |
| 2 | 1.2500 | 1.3750 | 1.3125 | − |
| 3 | 1.3125 | 1.3750 | 1.3438 | + |
| 4 | 1.3125 | 1.3438 | 1.3281 | + |
| 5 | 1.3125 | 1.3281 | 1.3203 | − |
| 6 | 1.3203 | 1.3281 | 1.3242 | − |

由于误差 $|x-x^*|\leqslant 0.005$，所以 $x^*\approx x_6=1.3242$。

二分法是方程求根问题的一种直接搜索方法，其优点是算法简单直观，收敛性总能得到保证，对 $f(x)$ 要求不高，并且非常实用。二分法的缺点是收敛速度较慢，且只能求单实根，不能求复根和重根。因此，二分法常用于求根的初始近似值，然后再使用其他方法求根。

# 第二节　迭代法及其收敛性

迭代法是数值计算方法中一种重要的逐次逼近的方法，常用于求解代数方程、超越方程、方程组和微分方程等。

## 一、简单迭代法

迭代法的主要特点就是逐步求精，其基本思想是：将方程 $f(x)=0$ 化为等价方程 $x=\varphi(x)$，构造迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，选取方程的某个初始近似值 $x_0$ 代入公式，并用该公式反复迭代计算，得方程的近似根数列，最终求得满足精度要求的根。从某种意义上讲，迭代过程实质上是一个逐步显式化的过程。

迭代法的具体过程可描述为：

设$[a,b]$是方程 $f(x)=0$ 的有根区间。将方程作等价变换

$$x=\varphi(x) \tag{2-4}$$

式中，$\varphi(x)$连续，称为**迭代函数**。在区间$[a,b]$上任取一点 $x_0$ 作为初始值，代入式(2-4)的右端，得

$$x_1=\varphi(x_0)$$

再将 $x_1$ 代入式(2-4)的右端，得

$$x_2=\varphi(x_1)$$

一般地，有

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\ (k=0,1,2\cdots) \tag{2-5}$$

这样由式(2-5)得到解的近似数列$\{x_k\}$的过程，称为**简单迭代法**。式(2-5)称为**迭代公式**或**迭代格式**。如果得到的近似数列有极限

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x^* \tag{2-6}$$

则 $x^*$ 就是方程式 $x=\varphi(x)$ 或 $f(x)=0$ 的**根**。如果迭代公式(2-5)产生的数列$\{x_k\}$收敛，则称**迭代法收敛**；如果数列$\{x_k\}$发散，则称**迭代法发散**。

迭代法的几何意义可解释为：求方程 $x=\varphi(x)$ 的根，在几何上就是在 $xOy$ 平面上求直线 $y=x$ 与曲线 $x=\varphi(x)$ 的交点 $P$ 的横坐标 $x^*$。如图 2-2(a)所示。

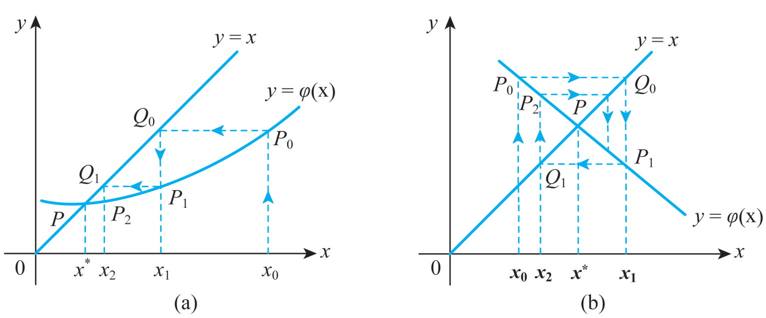


图 2-2　求方程 $x=\varphi(x)$ 根的迭代法收敛

由初始值 $x_0$ 得曲线 $y=\varphi(x)$ 上的点 $P_0(x_0, \varphi(x_0))$。在直线 $y=x$ 上找与 $P_0$ 在同一水平线上的点 $Q_0(x_1, x_1)$，得曲线 $y=\varphi(x)$ 上且与 $Q_0$ 点在同一铅直线上的点 $P_1(x_1, \varphi(x_1))$；再在直线 $y=x$ 上找与 $P_1$ 点在同一水平线上的点 $Q_1(x_2, x_2)$，…，如此进行下去，在曲线 $y=\varphi(x)$ 上得点列 $P_0$，$P_1$，$P_2$，…，各点逐渐逼近于交点 $P$，点列的横坐标 $x_0$，$x_1$，$x_2$，…，逐渐趋于根 $x^*$。图 2-2(b)中的数列 $x_0$，$x_1$，$x_2$，…是从 $x^*$ 的两端依次逐渐趋于 $x^*$ 的。然而，并非所有的迭代方法都是收敛的，图 2-3(a)，(b)中所示的迭代法就是发散的。

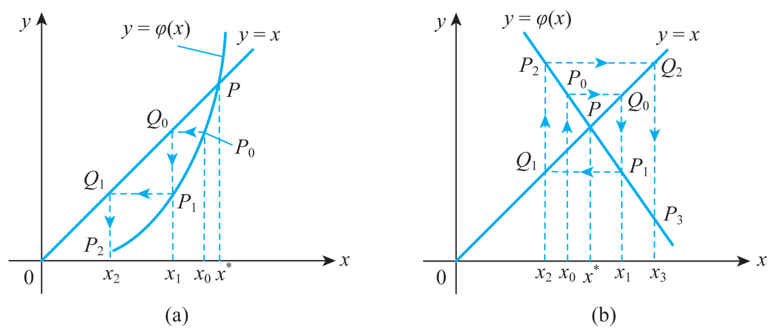


图 2-3　求方程 $x=\varphi(x)$ 根的迭代法发散

**例 2-4**　用简单迭代法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 的根，要求精确到 8 位小数。

**解：** 由例 2-3 可得，所给方程在[1，1.5]内有根，取初值 $x_0=1.5$。下面分别构造不同的迭代公式进行求解。

(1) 将原方程化为等价方程 $x=x^3-1$，构造迭代公式

$$x_{k+1}=x_k^3-1 \tag{2-7}$$

计算得

$$x_1=2.375,\ x_2=12.39648438,\ x_3=1904.00277454,\ \cdots$$

显然，按迭代公式(2-7)计算，所得迭代数列发散。

(2) 将原方程化为等价方程 $x=\sqrt[3]{x+1}$，得迭代公式

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1} \tag{2-8}$$

计算结果见表 2-3。

表 2-3　例 2-4 的计算结果

| $k$ | $x_k$ | $k$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.5000000 | 5 | 1.3247600 |
| 1 | 1.3572088 | 6 | 1.3247259 |
| 2 | 1.3308610 | 7 | 1.3247195 |
| 3 | 1.3258838 | 8 | 1.3247182 |
| 4 | 1.3249394 | 9 | 1.3247180 |

可以看出，按迭代公式(2-8)计算，所得迭代数列是收敛的。当 $k$ 越来越大时，$x_k$ 越来越接近于方程的精确根 1.3247180。

例 2-4 说明，迭代过程只在一定条件下才可能收敛。迭代函数 $\varphi(x)$ 的选取将会对迭代过程的收敛性产生很大的影响。只有收敛的迭代过程对于根的求解才有意义，而发散的迭代过程是没有任何实际意义的。下面讨论迭代法的收敛性。

## 二、迭代法的收敛性

**定理 2-1(收敛性定理)**　假设迭代函数 $\varphi(x)$ 满足以下两个条件：

(1) 对任意 $x\in[a,b]$，有

$$a\leqslant\varphi(x)\leqslant b \tag{2-9}$$

(2) 存在正数 $L<1$，使对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$|\varphi'(x)|\leqslant L<1 \tag{2-10}$$

则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意初值 $x_0\in[a,b]$ 均收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根 $x^*$，且有如下的误差估计式

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{1}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \tag{2-11}$$

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \tag{2-12}$$

**证明**　先证 $x^*$ 的存在唯一性。令 $f(x)=x-\varphi(x)$，由定理 2-1 条件(1)得 $f(a)\cdot f(b)<0$，所以 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内至少有一个根 $x^*$，满足 $x^*=\varphi(x^*)$。

假设 $x^*$ 和 $x_1^*$ 是 $x=\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内的两个互异的根，即 $x^*\neq x_1^*$，根据微分中值定理，有

$$|x^*-x_1^*|=|\varphi(x^*)-\varphi(x_1^*)|=|\varphi'(\xi)(x^*-x_1^*)|\leqslant L|x^*-x_1^*|$$

若此不等式成立，则有 $L\geqslant1$，这与条件(2)中 $L<1$ 矛盾，因此 $x=\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内存在唯一根，记为 $x^*$。

再证明收敛性。由 $x_0\in[a,b]$ 及定理 2-1 条件(1)可得，$x_k\in[a,b]$ $(k=1,2,\cdots)$，由迭代格式 $x_k=\varphi(x_{k-1})$ 和 $x^*=\varphi(x^*)$，可得

$$|x^*-x_k|=|\varphi(x^*)-\varphi(x_{k-1})|=|\varphi'(\xi_k)(x^*-x_{k-1})|\leqslant L|x^*-x_{k-1}| \tag{2-13}$$

式中，$\xi_k$ 位于 $x^*$ 与 $x_{k-1}$ 之间。

如此反复递推

$$|x^*-x_k|\leqslant L|x^*-x_{k-1}|\leqslant L^2|x^*-x_{k-2}|\leqslant\cdots\leqslant L^k|x^*-x_0| \tag{2-14}$$

因此，当 $k\to\infty$ 时，$x_k\to x^*$，迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到所求根 $x^*$。

在上述证明中，为确保 $\varphi(x_k)$ 有意义，应当保证一切迭代值 $x_k$ 全部落在区间 $[a,b]$ 内，这就要求对任意 $x\in[a,b]$，总有 $\varphi(x)\in[a,b]$。

下面证明误差估计式(2-11)和(2-12)。对任意正整数 $p$，有

$$\begin{aligned}|x_{k+p}-x_k| &= |x_{k+p}-x_{k+p-1}+x_{k+p-1}-x_{k+p-2}+x_{k+p-2}-\cdots-x_k|\\ &\leqslant |x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k+1}-x_k|\\ &\leqslant L^p|x_k-x_{k-1}|+L^{p-1}|x_k-x_{k-1}|+\cdots+L|x_k-x_{k-1}|\\ &=(L^p+L^{p-1}+\cdots+L)|x_k-x_{k-1}|\end{aligned}$$

在上式中固定 $k$，并令 $p\to\infty$，则有

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

再利用式(2-13)，对上式反复递推，得

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

证毕。

几点说明：

（1）由式(2-11)可知，只要前后两次迭代值的差值 $|x_k-x_{k-1}|$ 足够小，就可以保证近似值 $x_k$ 具有足够的精度。因此，常常通过 $|x_{k+1}-x_k|$ 来判断是否满足迭代精度。

（2）由式(2-12)表明，$L$ 值越小，迭代收敛的越快。如果预先给定计算精度 $\varepsilon$，还可以用式(2-12)估计迭代次数。

（3）在定理 2-1 条件下，把有根区间 $[a,b]$ 内的任一点 $x_0$ 作为初始值，均能保证该迭代过程收敛。通常称这种形式的收敛性为**全局收敛性**。

一般来说，定理 2-1 中的条件在较大的有根区间上是很难保证的，在实际应用时通常在根 $x^*$ 的附近考察其收敛性，即局部收敛性。

**定义 2-1** 设方程 $x=\varphi(x)$ 有根 $x^*$，如果存在 $x^*$ 的某个邻域 $R$：$|x-x^*|\leqslant\delta$，使迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意初值 $x_0\in R$ 均收敛，则称迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在根 $x^*$ 邻近具有**局部收敛性**。

**定理 2.2(局部收敛性定理)** 设 $\varphi(x)$ 在方程 $x=\varphi(x)$ 的根 $x^*$ 的附近有连续的一阶导数，且

$$|\varphi'(x^*)|<1 \tag{2-15}$$

则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在 $x^*$ 的附近具有局部收敛性。

**证明** 由连续函数的性质，存在 $x^*$ 的某个邻域 $R$：$|x-x^*|\leqslant\delta$，使对于任意 $x\in R$ 成立，则有 $|\varphi'(x)|\leqslant L<1$，此外，对于任意 $x\in R$，总有 $\varphi(x)\in R$，这是因为

$$|\varphi(x)-x^*|=|\varphi(x)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi)(x-x^*)|\leqslant L|x-x^*|\leqslant|x-x^*|\leqslant\delta$$

其中，$\xi$ 位于 $x$ 与 $x^*$ 之间。依据定理 2-1 即可断定迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意初值 $x_0\in R$ 均收敛。证毕。

由此可见，迭代过程的收敛性通常依赖于迭代初值 $x_0$ 的选取。

**例 2-5** 求方程 $x-\mathrm{e}^{-x}=0$ 在 $x=0.5$ 附近的一个根，要求精度 $\varepsilon=10^{-5}$。

**解：** 将方程变形为 $x=\mathrm{e}^{-x}$，构造迭代公式为

$$x_{k+1}=\mathrm{e}^{-x_k}\ (k=0,1,2\cdots)$$

过 $x=0.5$ 以 $h=0.1$ 为步长搜索一次，计算得所求的根在区间 $[0.5,0.6]$ 内，且有

$$\max_{0.5 \le x \le 0.6} |(e^{-x})'| < 1$$

满足定理 2-1 的收敛条件。取 $x_0 = 0.5$，使用迭代公式 $x_{k+1} = e^{-x_k}$ 计算，结果如表 2-4 所示。

表 2-4　例 2-5 的计算结果

| $k$ | $x_k$ | $k$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.500000 | 10 | 0.566907 |
| 1 | 0.606531 | 11 | 0.567277 |
| 2 | 0.545239 | 12 | 0.567067 |
| 3 | 0.579703 | 13 | 0.567186 |
| 4 | 0.560065 | 14 | 0.567119 |
| 5 | 0.571172 | 15 | 0.567157 |
| 6 | 0.566409 | 16 | 0.567135 |
| 7 | 0.568438 | 17 | 0.567148 |
| 8 | 0.566409 | 18 | 0.567141 |
| 9 | 0.567560 | | |

从计算结果可以看出，

$$|x_{18} - x_{17}| = |0.567141 - 0.567148| = 0.000007 < 10^{-5}$$

因此，取近似根为 $x^* \approx 0.56714$。所求根的准确值是 0.567143。

## 三、迭代法的收敛速度

衡量一种迭代算法的实用价值，不仅需要保证它是收敛的，还要求它收敛速度快。所谓迭代过程的收敛速度，是指在接近收敛时迭代误差的下降速度。

**定义 2-2**　设迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛于方程 $x = \varphi(x)$ 的根 $x^*$，如果当 $k \to \infty$ 时，迭代误差 $e_k = x_k - x^*$ 满足渐进关系式

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} \to C \ (C \text{ 为常数且 } C \neq 0) \tag{2-16}$$

则称迭代过程 $\{x_k\}$ 是 ***p* 阶收敛**的。特别地，当 $p = 1$、$|C| < 1$ 时称作**线性收敛**；$p = 2$ 时称作**平方收敛**。

收敛速度是误差的收缩率，阶数 $p$ 的大小反映了迭代法收敛的快慢，阶数越高，收敛得越快。

**定理 2-3（收敛阶判别定理）**　设 $\varphi(x)$ 在 $x = \varphi(x)$ 的根 $x^*$ 附近有连续的 $p$ 阶导数，且

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0, \quad \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0 \tag{2-17}$$

那么，迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在点 $x^*$ 附近是 $p$ 阶收敛的。

**证明** 由于 $\varphi'(x^*)=0$，根据定理 2-2 可以判定，迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有局部收敛性。将 $\varphi(x_k)$ 在 $x^*$ 处作泰勒展开，有

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\frac{1}{2}\varphi''(x^*)(x_k-x^*)^2+\cdots+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_k-x^*)^p$$

其中 $\xi$ 是 $x_k$ 与 $x^*$ 之间的某一点。由式(2-17)得，

$$\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_k-x^*)^p$$

由于 $\varphi(x_k)=x_{k+1}$，$\varphi(x^*)=x^*$，于是

$$x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

因此，当 $k\to\infty$ 时，有

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}\to\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!} \tag{2-18}$$

所以，迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是 $p$ 阶收敛的。证毕。

**例 2-6** 设迭代过程

$$x_{k+1}=\frac{2}{3}x_k+\frac{1}{x_k^2}$$

收敛于 $x^*=\sqrt[3]{3}$，求其收敛速度。

**解：** 因为

$$\varphi(x_k)=\frac{2}{3}x_k+\frac{1}{x_k^2}$$

所以

$$\varphi(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{x^2}$$

由于

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}-\frac{2}{x^3},\quad \varphi''(x)=\frac{6}{x^4}$$

将 $x^*=\sqrt[3]{3}$ 代入，得

$$\varphi'(x^*)=0,\quad \varphi''(x^*)=\frac{6}{3\sqrt[3]{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\neq 0$$

因此，迭代过程 $x_{k+1}=\dfrac{2}{3}x_k+\dfrac{1}{x_k^2}$ 是平方收敛的。

## 四、埃特金加速法

对于收敛的迭代过程，只要迭代次数足够多，就可使结果达到任意精度要求，但有时迭代过程收敛极为缓慢，使计算量变得很大而失去实际应用的意义。因此，如何加快迭代

过程的收敛速度是一个很重要的问题。下面介绍一种简便易行而又能大幅度提高收敛速度的方法。

以线性收敛的迭代法为例，假设$\{x_k\}$是方程 $x=\varphi(x)$ 的近似根收敛序列，收敛于方程的根 $x^*$，且具线性收敛速度。

设 $\tilde{x}_{k+1}$为近似根 $x_k$ 再经过一次迭代得到的结果，即 $\tilde{x}_{k+1}=\varphi(x_k)$，又因 $x^*$ 为迭代方程的根，即 $x^*=\varphi(x^*)$，利用微分中值定理，有

$$x^*-\tilde{x}_{k+1}=\varphi'(\xi)(x^*-x_k)$$

其中 $\xi$ 为 $x^*$ 与 $x_k$ 之间的某一点。

假设 $\varphi'(x)$在求根范围内改变不大，则可近似地取某个定值 $L$，即有

$$x^*-\tilde{x}_{k+1}\approx L(x^*-x_k) \tag{2-19}$$

再将迭代值 $\tilde{x}_{k+1}$用迭代公式校正一次得

$$\bar{x}_{k+1}=\varphi(\tilde{x}_{k+1})$$

同样地，有

$$x^*-\bar{x}_{k+1}\approx L(x^*-\tilde{x}_{k+1}) \tag{2-20}$$

式(2-20)与式(2-19)相除，得

$$\frac{x^*-\bar{x}_{k+1}}{x^*-\tilde{x}_{k+1}}\approx\frac{x^*-\tilde{x}_{k+1}}{x^*-x_k}$$

整理得

$$x^*\approx\frac{x_k\bar{x}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1}^2}{\bar{x}_{k+1}-2\tilde{x}_{k+1}+x_k}=\bar{x}_{k+1}-\frac{(\bar{x}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1}-2\tilde{x}_{k+1}+x_k} \tag{2-21}$$

记

$$x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}-\frac{(\bar{x}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1}-2\tilde{x}_{k+1}+x_k} \tag{2-22}$$

则 $x_{k+1}$就是比 $\tilde{x}_{k+1}$，$\bar{x}_{k+1}$更好的近似值。

上述处理过程称作**埃特金(Aitken)加速方法**。

对 $x=\varphi(x)$方程，构造加速过程算法如下：

校正

$$\tilde{x}_{k+1}=\varphi(x_k) \tag{2-23}$$

再校正

$$\bar{x}_{k+1}=\varphi(\tilde{x}_{k+1}) \tag{2-24}$$

改进

$$x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}-\frac{(\bar{x}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1}-2\tilde{x}_{k+1}+x_k} \tag{2-25}$$

在迭代加速过程中，加速过程不必计算迭代函数 $\varphi(x)$，因此使用埃特金加速法可使迭代过程加速并取得显著的效果。

**例 2-7** 用加速收敛的方法求方程 $x^3-x-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近的一个根。

**解：** 在例 2-4 中我们曾经指出，求解这一方程的迭代公式 $x_{k+1}={x_k}^3-1$ 是发散的。现在以这种迭代公式为基础形成埃特金加速算法。

迭代加速公式的具体形式为

$$\tilde{x}_{k+1}=x_k^3-1$$

$$\bar{x}_{k+1}=\tilde{x}_{k+1}^3-1$$

$$x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}-\frac{(\bar{x}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1}-2\tilde{x}_{k+1}+x_k}$$

仍然取 $x_0=1.5$，其计算结果如表 2-5 所示。

表 2-5 例 2-7 的计算结果

| $k$ | $\tilde{x}_k$ | $\bar{x}_k$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | | 1. 5000 |
| 1 | 2. 37500 | 12. 3965 | 1. 41629 |
| 2 | 1. 84092 | 5. 23888 | 1. 35565 |
| 3 | 1. 49140 | 2. 31728 | 1. 32895 |
| 4 | 1. 34710 | 1. 44435 | 1. 32480 |
| 5 | 1. 32518 | 1. 32714 | 1. 32472 |

从例 2-7 可以看到，将发散的迭代公式 $x_{k+1}={x_k}^3-1$ 通过埃特金方法处理后，竟获得了相当好的收敛性。

埃特金加速法的几何解释能够帮助我们非常直观地说明这一有趣的现象(如图 2-4 所示)。

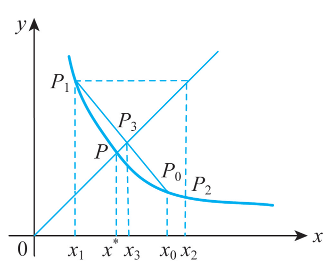


图 2-4 埃特金方法的几何解释

设 $x_0$ 为方程 $x=\varphi(x)$ 的一个近似根，依据迭代值 $x_1=\varphi(x_0)$，$x_2=\varphi(x_1)$ 在曲线 $y=$

$\varphi(x)$上定出两点$P_0(x_0,\ x_1)$和$P_1(x_1,\ x_2)$，引弦线$\overline{P_0P_1}$并设与直线$y=x$交于一点$P_3$，则$P_3$的横坐标(其横坐标与纵坐标相等)满足

$$x_3=x_1+\frac{x_2-x_1}{x_1-x_0}(x_3-x_0)$$

整理得

$$x_3=\frac{x_0x_2-x_1^{\ 2}}{x_2-2x_1+x_0}$$

这就是**埃特金加速公式**。

从图 2-4 可以看出，所求根$x^*$是曲线$y=\varphi(x)$与$y=x$交点$P^*$的横坐标，尽管迭代值$x_2$比$x_0$和$x_1$更远地偏离了$x^*$，但按上式确定的$x_3$却明显地扭转了这种发散的趋势。

# 第三节　牛顿迭代法

## 一、牛顿迭代法

如果方程$f(x)=0$是线性方程，则它的根是容易求解的。牛顿迭代法就是一种线性化的近似方法，其基本思想是：将非线性方程线性化，以线性方程的解逐步逼近非线性方程的解。

### (一) 牛顿迭代法的构造

设$x_k$是$f(x)=0$的一个近似根，把$f(x)$在$x_k$处泰勒展开，有

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2!}f''(x_k)(x-x_k)^2+\cdots$$

若取前两项来近似代替$f(x)$，则得$f(x)=0$的近似线性方程为

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

令$f'(x_k)\neq 0$，假设上述方程的解为$x_{k+1}$，则其计算公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{2-26}$$

称式(2-26)为**牛顿(Newton)迭代公式**，称这种方法为**牛顿迭代法**。其迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2-27}$$

### (二)牛顿迭代法的几何解释

如图 2-5 所示，方程$f(x)=0$的根$x^*$在几何上解释为曲线$y=f(x)$与$x$轴的交点的横坐标。设初始近似值是$x_0$，过点$P_0(x_0,\ f(x_0))$作曲线$y=f(x)$的切线$L_0$：$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，切线$L_0$与$x$轴交点的横坐标记为$x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，则$x_1$是$x^*$的一次近似值。继续过点$P_1(x_1,\ f(x_1))$作曲线$y=f(x)$的切线$L_1$：$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$，切线

$L_1$ 与 $x$ 轴交点的横坐标记为 $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$，则 $x_2$ 是 $x^*$ 的二次近似值。重复以上过程，可得求 $x^*$ 的近似值序列，记为。

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

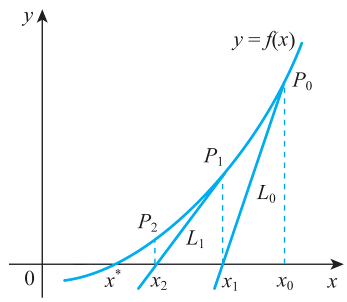


图 2-5　牛顿迭代法的几何解释

由此可得，牛顿迭代法在几何上是用曲线 $y=f(x)$ 的切线与 $x$ 轴的交点来近似曲线 $y=f(x)$ 与 $x$ 轴的交点。基于这种几何解释，牛顿迭代法也称为切线法。

**例 2-8**　用牛顿迭代法求 $x=e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的根，精度取 $\varepsilon=0.00005$。

**解：** 首先将方程 $x=e^{-x}$ 变形为 $f(x)=xe^x-1=0$，则相应的牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}$$

取 $x_0=0.5$ 作为迭代初值，迭代结果列于表 2-6。

表 2-6　例 2-8 的计算结果

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $x_k$ | 0.5 | 0.57102 | 0.56716 | 0.56714 |
| $\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$ |  | 0.07102 | 0.00386 | 0.00002 |

经过 3 次迭代后得 $x_3=0.56714$，$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert=0.00002<\varepsilon$。比较例 2-3 和例 2-8 可发现，牛顿迭代法的收敛速度是相当快的。

## （三）牛顿迭代法的计算步骤

（1）准备。采用二分法或逐步搜索法等方法选取 $x_0$ 为初始近似值，计算 $f_0=f(x_0)$，$f'_0=f'(x_0)$。

（2）迭代。按迭代公式 $x_1=x_0-f_0/f'$ 迭代一次，得到新的近似值 $x_1$，计算 $f_1=f(x_1)$，$f'_1=f'(x_1)$。

（3）控制。如果 $x_1$ 满足 $\lvert\delta\rvert<\varepsilon_1$ 或 $\lvert f_1\rvert<\varepsilon_2$，则终止迭代，$x_1$ 即为所求的根；否则转步骤(4)。这里，$\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 是允许误差，而

$$\delta=\begin{cases}|x_1-x_0|, & |x_1|<C\\ \dfrac{|x_1-x_0|}{|x_1|}, & |x_1|\geqslant C\end{cases}$$

式中，$C$ 是取绝对误差或相对误差的控制常数，一般可取 $C=1$。

(4) 修正。如果迭代次数达到预先指定次数 $N$，或者 $f_1'=0$，则方法失败；否则以$(x_1, f_1, f_1')$代替$(x_0, f_0, f_0')$转步骤(2)继续迭代。

### (四) 牛顿迭代法的数学应用

**例 2-9**　构造计算$\sqrt{C}$ ($C>0$)的牛顿迭代公式，并计算$\sqrt{115}$的近似值，精度为$10^{-5}$。

**解：** 由于$\sqrt{C}$ ($C>0$)是方程 $x^2-C=0$ 的正根，因此取$f(x)=x^2-C$，则有$f'(x)=2x$。得到求平方根的牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^2-C}{2x_k}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{C}{x_k}\right)\quad(k=0, 1, 2, \cdots)$$

将 $C=115$ 代入上式，则迭代公式变为

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{115}{x_k}\right)$$

由于$\sqrt{115}\in[10, 11]$，故取初始近似值 $x_0=10$，迭代计算结果如表 2-7 所示。由于$|x_4-x_3|<10^{-5}$，故当 $k=3$ 时，得$\sqrt{115}\approx 10.723805$。

表 2-7　例 2-9 的计算结果

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 10 | 10.750000 | 10.723837 | 10.723805 | 10.723805 |
| $\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$ |  | 0.750000 | 0.026163 | 0.000032 | 0.000000 |

**例 2-10**　不直接用除法计算，使用牛顿迭代法求解$\dfrac{1}{C}$ ($C>0$)的计算公式，并使用该公式计算$\dfrac{1}{1.2345}$的近似值，计算结果精确至$10^{-5}$。

**解：** 令$\dfrac{1}{x}=C$，取$f(x)=\dfrac{1}{x}-C$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，则迭代函数为

$$x=x-\frac{\frac{1}{x}-C}{-\frac{1}{x^2}}=2x-Cx^2$$

求倒数的牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=2x_k-cx_k^{\ 2}$$

取 $x_0=\dfrac{1.2345}{2}=0.61725$，迭代结果如表 2-8 所示。

表 2-8　例 2-10 的计算结果

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0.61725 | 0.76419 | 0.807445 | 0.810036 | 0.810045 | 0.810045 |
| $\|x_k-x_{k-1}\|$ | | 0.140909 | 0.043286 | 0.002591 | 0.000009 | 0.000000 |

可见，迭代 4 次便可得到满足计算精度$10^{-5}$条件下的结果，即 $x_0=\dfrac{1}{1.2345}\approx0.810045$。

## 二、牛顿迭代法的局部收敛性

**定理 2-4(牛顿迭代法局部收敛性定理)**　设 $x^*$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根，$f(x)$ 在 $x^*$ 附近二阶导数连续，且 $f'(x^*)\neq0$，则牛顿迭代法在 $x^*$ 的附近至少为二阶收敛的。且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \tag{2-28}$$

**证明**　由牛顿法的迭代函数式 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，方程两边同时对 $x$ 求导，有，

$$\varphi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

由已知条件 $f''(x)$ 在 $x^*$ 附近连续，$f'(x^*)\neq0$，故 $\varphi'(x)$ 在 $x^*$ 附近连续，且有

$$\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2}=0$$

根据定理 2-3 可得，牛顿迭代法在 $x^*$ 的附近至少应是二阶收敛的。

将 $f(x^*)=0$ 利用泰勒公式进行展开，得

$$0=f(x^*)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x^*-x_k)^2$$

其中，$\xi$ 位于 $x^*$ 与 $x_k$ 之间。则有

$$x_k-x^*\approx\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}+\frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

整理得，

$$x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-x^*\approx\frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

由于等式左边前两项恰好是牛顿迭代公式(2-26)，则有

$$x_{k+1}-x^*\approx\frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

当 $k\to\infty$ 求极限，则有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

证毕。

由定理 2-4 可知：若 $f(x)=0$ 在其单根 $x^*$ 附近存在着连续的二阶导数，当初值 $x_0$ 在单根附近时，牛顿迭代法具有平方收敛速度。

## 三、计算 $m$ 重根的牛顿迭代法

前面我们证明了当 $f(x)=0$ 具有单根 $x^*$ 且存在着连续的二阶导数时，牛顿迭代法具有平方收敛速度；当 $f(x)=0$ 存在 $m$ 重根时，牛顿迭代法如何应用呢？其收敛速度如何呢？下面将分两种情况进行讨论。

当方程的重根数 $m$ 已知时，设 $x^*$ 是 $f(x)=0$ 的 $m$ 重根 $(m\geqslant 2)$，则有 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，其中 $m$ 为正整数，且 $g(x^*)\neq 0$，由牛顿迭代法的迭代函数 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$得

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}$$

$$\varphi(x^*)=\lim_{x\to x^*}\varphi(x)=x^*$$

$$\varphi'(x^*)=\lim_{x\to x^*}\frac{\varphi(x)-\varphi(x^*)}{x-x^*}=\lim_{x\to x^*}\left[1-\frac{g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}\right]=1-\frac{1}{m}$$

由 $m\geqslant 2$ 得 $\varphi'(x^*)=1-\dfrac{1}{m}\neq 0$，且有 $|\varphi'(x^*)|<1$。所以，牛顿迭代法求重根仍收敛，但只是线性收敛。

为了得到平方收敛速度，则可做如下的处理。若迭代函数改为 $\varphi(x)=x-m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，则 $\varphi'(x^*)=0$，相应的牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{2-29}$$

可以验证该迭代方法具有二阶收敛速度。

迭代公式(2-29)需要知道根的重数 $m$，这在实际计算中往往是很困难的。因此，该迭代公式并不能直接使用。下面的改进更有实用价值。

当方程的重根数 $m$ 未知时，还可构造另一种迭代法，令 $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，若 $x^*$ 是 $f(x)=0$ 的 $m$ 重根，则

$$u(x)=\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}$$

所以 $x^*$ 是 $u(x)=0$ 的单根，对它用牛顿迭代法，其迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{u(x)}{u'(x)}=x-\frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}$$

可构造迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{2-30}$$

可以验证该迭代方法仍然具有二阶收敛速度。

**例 2-11** 已知 $x^*=\sqrt{2}$ 是方程 $x^4-4x^2+4=0$ 的二重根，试用牛顿迭代法、求重根的牛顿迭代法(2-29)、(2-30)三种方法，求其近似根。

**解：** 由 $f(x)=x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2$ 得

$$f'(x)=4x(x^2-2),\quad f''(x)=4(3x^2-2)$$

下面分别写出三种方法的迭代公式。

方法 1：牛顿迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-2}{4x_k},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

方法 2：重根 $m=2$ 的牛顿迭代法

$$x_{k+1}=x_k-2\frac{x_k^2-2}{4x_k}=x_k-\frac{x_k^2-2}{2x_k},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

方法 3：迭代法式(2-30)

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k(x_k^2-2)}{x_k^2+2},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

三种方法均取初值 $x_0=1.5$，迭代三次，计算结果如表 2-9 所示。

**表 2-9 例 2-11 的计算结果**

| $k$ | $x_k$ | 方法(1) | 方法(2) | 方法(3) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_0$ | 1.5 | 1.5 | 1.5 |
| 1 | $x_1$ | 1.458333333 | 1.416666667 | 1.411764706 |
| 2 | $x_2$ | 1.436607143 | 1.414215686 | 1.414211438 |
| 3 | $x_3$ | 1.425497619 | 1.414213562 | 1.414213562 |

可以看出，迭代三次之后，方法(2)与方法(3)均达到$10^{-9}$精确度，而方法(1)只有线性收敛，要达到相同精度需迭代 30 次。

综上所述，无论是方程存在单根或重根的情况，利用牛顿迭代法及其变形公式总能使迭代过程达到收敛速度快、稳定性好、精度高的特点，它是求解非线性方程的有效方法之一。然而，牛顿迭代法也有其局限性，例如在每次迭代时都需要计算函数值与其导数值，导致该方法的计算量较大，特别是当导数值难以给出时，牛顿迭代法甚至无法进行下去。

## 第四节 弦割法

牛顿迭代法突出的优点是收敛速度快，其基本思想可推广到各类非线性方程组。但它有明显的缺点，即每迭代一次都要计算 $f(x_k)$ 和 $f'(x_k)$。导数的计算通常要比函数值的计算困难的多，如果函数 $f(x)$ 比较复杂时，那么计算它的导数值会更加困难。

为了避免导数的计算，可以改用差商替换牛顿迭代公式中的导数，对牛顿法进行简单

改进。根据导数的定义，有

$$f(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

代入牛顿迭代公式(2-26)，可得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}),\quad k=1,\ 2,\ \cdots \tag{2-31}$$

使用式(2-31)求解非线性方程的方法称为**弦割法**。

弦割法的几何解释：选定曲线 $y=f(x)$ 上的两个点 $P_0(x_0,\ f(x_0))$ 和 $P_1(x_1,\ f(x_1))$，过这两点作一条直线 $\overline{P_0P_1}$(即割线)，如图 2-6 所示，则直线方程为

$$y=f(x_1)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_1)$$

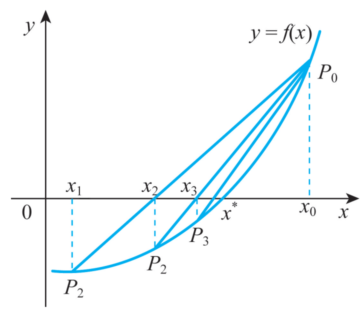


图 2-6　弦割法的几何解释

当 $y_0 \neq y_1$ 时设直线与 $x$ 轴的交点是 $x_2$，则

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1-x_0)$$

若把 $x_2$ 作为曲线 $f(x)$ 与 $x$ 轴的交点的近似值，可以预期 $x_2$ 比 $x_0$、$x_1$ 更接近于方程的根 $x^*$，于是用新的近似值 $x_2$ 来代替 $x_0$。重复上述过程继续作割线，又可得新的 $x_3$，反复执行，其迭代过程为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}),\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

同样推导出了弦割法的迭代公式。从几何上看，弦割法是以曲线上两点的割线与 $x$ 轴的交点作为曲线与 $x$ 轴的交点的近似，因此弦割法又称为割线法、弦截法。

弦割法与牛顿迭代法(切线法)都是线性化方法，但是两者有本质的区别。牛顿迭代法在计算 $x_{k+1}$ 时只用到前一步的值 $x_k$，而弦割法在计算 $x_{k+1}$ 时要用到前两步的值 $x_k$、$x_{k-1}$，因此在使用弦割法时必须先给出两个初始值 $x_0$ 和 $x_1$。

**例 2-12**　用弦割法求 $x=e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的根。

**解：** 设 $f(x)=xe^x-1$，代入式(2-31)得到弦割法的迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_ke^{x_k}-1}{x_ke^{x_k}-x_{k-1}e^{x_{k-1}}}(x_k-x_{k-1}),\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

取初值 $x_0=0.5$，$x_1=0.6$，计算结果如表 2-10 所示。

表 2-10　例 2-12 的计算结果

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0.5 | 0.6 | 0.565315 | 0.567095 | 0.567143 | 0.567143 |
| $\|x_k-x_{k-1}\|$ | | 0.1 | 0.034685 | 0.001780 | 0.000068 | 0.000000 |

与例 2-8 中牛顿迭代法的计算结果(表 2-6)相比较，可以看出弦割法的收敛速度仅比牛顿法稍慢一点。但与例 2-5 中一般迭代法的计算结果(表 2-4)相比较，弦割法的收敛速度也是相当快的。

**例 2-13**　用弦割法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在区间[1，1.5]的根，精度为$10^{-5}$。

**解：** 设 $f(x)=x^3-x-1$，代入式(2-31)得到弦割法的迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{(x_k^3-x_k)-(x_{k-1}^3-x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}),\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

取初值 $x_0=1$，$x_1=1.5$，计算结果如表 2-11 所示。

表 2-11　例 2-13 的计算结果

| $k$ | $x_k$ | $\|x_k-x_{k-1}\|$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | |
| 1 | 1.5 | 0.5 |
| 2 | 1.266667 | 0.233333 |
| 3 | 1.315962 | 0.049295 |
| 4 | 1.325214 | 0.009252 |
| 5 | 1.324714 | 0.000500 |
| 6 | 1.324718 | 0.000004 |

在弦割法的计算中，每迭代一步只需计算一个函数值，避免了复杂的导数计算，且该方法具有超线性的收敛速度，仅稍慢于牛顿迭代法，因此它深受广大工程人员的喜爱。

# 本章小结

本章介绍了非线性方程 $f(x)=0$ 求根的一些数值解法，包括二分法、简单迭代法、埃特金加速法、牛顿迭代法、弦割法等。在这些求根方法中，先要确定有根区间，对于具有局部收敛性的迭代方法，这个区间要足够小。若想衡量各种求根方法的有效性和实用性，则要考虑其收敛性、收敛速度和计算量。

二分法是方程求根的一种直接搜索法，算法简单直观，收敛性总能得到保证，但收敛速度较慢，仅有线性收敛速度。虽然二分法只能求单实根，不能用于求重根和复根，但可以用来确定根的初始近似值。

简单迭代法是一种逐次逼近的方法，它是数值计算中方程求根的一种主要方法。但它

仅具有线性收敛速度，可采用埃特金加速方法，使其收敛速度加快。要特别注意，只具有局部收敛性的简单迭代方法，往往对初始值的选取要求特别高。

牛顿迭代法是方程求根的一种重要方法，其最大的优点是在方程的单根处具有局部平方收敛速度，且还可用来求方程的重根、复根，此时只具有线性收敛速度，但是可通过变形使其加快收敛速度。牛顿法的局限性是每次迭代时都需要计算函数值与其导数值，导致该方法的计算量较大。由于牛顿法是局部收敛的，因此在选择初始值时必须充分靠近方程的根，否则牛顿法可能不收敛。

弦割法是牛顿迭代法的一种改进，其主要特点是每迭代一次只需计算一个函数值，避免了复杂的导数计算，且该方法具有超线性的收敛速度，仅稍慢于牛顿迭代法。同牛顿法一样，弦割法也要求初始值必须选取得充分靠近方程的根，否则也可能不收敛。

在求根的各种迭代法中，迭代函数的构造非常重要，它直接影响收敛速度的快慢。因此，在实际计算中，要根据方程的特点，灵活、合理地选择其中一种迭代公式进行计算。

## 思考题

2-1　什么是二分法？二分法的优点是什么？

2-2　什么是简单迭代法？它的收敛条件、几何意义、误差估计式是什么？

2-3　迭代公式的收敛速度是如何定义的？如何判别迭代公式的收敛阶数？

2-4　埃特金加速法的处理思想是什么？它有什么优点？

2-5　牛顿迭代公式是什么？有什么几何意义？其收敛条件与收敛阶数是什么？

2-6　弦割法迭代公式是什么？有什么几何意义？叙述其收敛条件与收敛阶数并比较弦割法与牛顿法的优劣。

## 习题二

2-1　用二分法求方程 $x^2-x-1=0$ 的正根，要求误差不超过 0.05。

2-2　用二分法求方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间[0，1]内的根，使其具有 5 位有效数字至少应二分多少次？

2-3　已知方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近有根，把方程改写成 4 种不同的等价形式，并建立相应的迭代公式：

(1) $x=1+\dfrac{1}{x^2}$，$x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k^2}$；　　(2) $x^3=1+x^2$，$x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$；

(3) $x=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$，$x_{k+1}=\sqrt{\dfrac{1}{x_k-1}}$；　　(4) $x^2=x^3-1$，$x_{k+1}^2=x_k^3-1$。

分析每种迭代公式在 $x_0=1.5$ 处的收敛性。并用(2)的迭代公式求出具有四位有效数字的近似根。

2-4　用迭代法求 $x^3-3x+1=0$ 在区间[0，1]内的根，要求精确到$10^{-5}$。

2-5　用迭代法求方程 $e^x+10x-2=0$ 的根，要求精确到小数点后第 4 位。

2-6 用埃特金加速法求方程 $x=x^3-1$ 在区间[1, 1.5]内的根，要求精确到小数点后第 4 位。

2-7 已知方程 $f(x)=x^2+\sin x-1=0$，试判别方程有几个实根，并用牛顿法求出方程所有实根，要求精确到$10^{-4}$。

2-8 用牛顿法和求重根的牛顿法计算$\left(\sin x-\dfrac{x}{2}\right)^2=0$ 的一个近似根，初始值取 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$，要求精确到$10^{-5}$。

2-9 应用牛顿法于方程 $f(x)=x^n-a=0$ 和 $f(x)=1-\dfrac{a}{x^n}=0$，分别导出求$\sqrt[n]{a}$的迭代公式，并求$\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2$。

2-10 用弦割法求 $1-x-\sin x=0$ 的根，取 $x_0=0$，$x_1=1$，计算直到 $|1-x-\sin x|\leqslant\dfrac{1}{2}\times10^{-2}$。

2-11 分别用简单迭代法、牛顿迭代法和弦割法求方程 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的实根，要求精确到 4 位有效数字，并讨论其收敛性。

## 上机实验

**实验 2-1** 用牛顿迭代法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的根，要求精确到$10^{-4}$，输出每次的迭代结果并统计所用的迭代次数。

**实验 2-2** 用埃特金加速法求实验 2-1 中方程的根，并与实验一的结果比较，看哪种方法的收敛速度更快。