第 2 章　导数与微分

导数与微分是微分学的两个重要概念．微积分主要任务就是研究函数的各种性态以及函数值的计算或近似计算，导数与微分是解决这些问题的普遍的有效工具．本章将从两个实际问题抽象出导数概念，进而讨论导数的基本公式和求导的运算法则．在此基础上再给出微分的概念.

§2.1　导数的概念

一、引例

在生产实践和科学实验中，常常需要研究函数相对于自变量变化的快慢程度．例如，运动物体的瞬时速度、非恒稳的电流强度、化学反应速度、曲线的切线斜率等等．下面我们来讨论其中的两个问题：瞬时速度问题和切线问题．这两个问题在历史上都与导数概念的形成有密切的关系．

1. 直线运动的瞬时速度（某一时刻的速度）

设一物体作变速直线运动，它所经过的位移 s 与时间 t 的函数关系为 $s=f(t)$，求该物体在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$.

首先考虑该物体从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内位移从 $f(t_0)$ 变到 $f(t_0+\Delta t)$，在 Δt 这段时间内物体所经过的位移是

$$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0).$$

因此在 Δt 时间内，物体的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

若物体作匀速运动，则平均速度 $\bar{v}$ 就是物体在任何时刻的速度 v. 若物体的运动是变速的，则 $\bar{v}$ 一般不会正好是 t_0 的瞬时速度，但当 Δt 较小时，$\bar{v}$ 就是 t_0 的瞬时速度的近似值，当 Δt 越小，$\bar{v}$ 就越接近 t_0 **的瞬时速度**．于是物体在 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$ 就是当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速度 $\bar{v}$ 的极限（若极限存在），即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}. \tag{2-1}$$

2. 切线的斜率

圆的切线可定义为“与曲线只有一个交点的直线”．但是对于其他曲线，用“与曲线只有一个交点的直线”作为切线的定义就不一定合适．例如，对于抛物线 $y=x^2$ 在原点 O 处两个坐标轴都符合上述定义，但实际上只有 x 轴是该抛物线在点 O 处的切线．

下面给出切线的定义．

设有曲线 C 及 C 上的一点 M（见图 2－1），在点 M 外另取 C 上一点 N，作割线 MN．当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT，则直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线．这里极限位置的含义是：只要弦长 MN 趋于零，$\angle NMT$ 也趋于零．

设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图形，求曲线 C 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线的斜率（见图 2－2）．

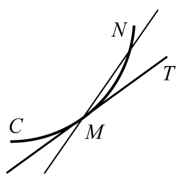

图 2－1

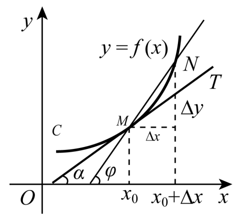

图 2－2

在曲线 C 上另取一点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，于是割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

其中，φ 为割线 MN 的倾斜角．由上述定义，当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，$\Delta x\to 0$．如果当 $\Delta x\to 0$ 时，上式的极限存在，设为 k，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{2-2}$$

存在，那么此极限是割线 MN 斜率的极限，也就是切线 MT 的斜率．这里 $k=\tan\alpha$，α 为切线的倾斜角．于是，曲线 C：$y=f(x)$ 上过点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

上面两个例题的实际意义完全不同，从抽象的数量关系来看，其实质都是函数的改变量与自变量的改变量之比的极限，这种特殊的极限就是我们下面要介绍的函数导数的概念．

二、导数的定义

上面所讨论的两个问题，一个是物理学中的瞬时速度问题，一个是几何学中的切线斜率，二者的实际意义完全不同．但是，它们的数学结构完全相同，都是函数的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 之比的极限（当 $\Delta x\to 0$）．这样就有下面的导数概念：

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx $[x_0+\Delta x\in U(x_0)]$ 时，函数有相应的改变量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2-3}$$

存在,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数,记作 $f'(x_0)$,即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

也可记作 $y'\big|_{x=x_0}$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$或$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或存在导数.

有时为了方便,极限(2-3)也可以改写为下列形式:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(\Delta x=h), \tag{2-4}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x}(x=x_0+\Delta x). \tag{2-5}$$

如果极限(2-3)不存在,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导,点 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的不可导点.

如果不可导的原因是由于 $\Delta x\to 0$ 时,比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$,即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$,为了方便起见,也往往说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大.

【注】导数概念是函数变化率这一概念的精确描述,而导数 $f'(x_0)$ 则是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的变化率,它反映了函数随自变量变化而变化的快慢程度.

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都可导,则称 $f(x)$ 在区间 I 上可导. 此时,对任一 $x\in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数 $f'(x)$. 根据定义,$f'(x)$ 是区间 I 上的函数,称为函数 $f(x)$ 在 I 上的**导函数**,也简称导数,记作 y',$f'(x)$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

显然,如果 $f'(x)$ 是连续函数,则 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数值就是 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值,即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$$

根据导数的定义,求函数 $f(x)$ 在点 x 的导数步骤如下.

(1)计算函数改变量:$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

(2)求比值:$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

(3)求极限:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

例 1　求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的导数.

解　当 x 由 1 变到 $1+\Delta x$ 时函数的增量为

$$\Delta y=(1+\Delta x)^3-1^3=3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3,$$

所以
$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}=3.$$

例 2　求函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数.

解　由于 $f(x+\Delta x)=C$，所以 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=0$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\text{则} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

即
$$(C)'=0.$$

也就是说，常数的导数为零.

例 3　求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解　因为
$$\begin{aligned}\Delta y&=(x+\Delta x)^n-x^n\\&=C_n^1x^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+C_n^nx^0\Delta x^n,\end{aligned}$$

所以
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(nx^{n-1}+C_n^2x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1})=nx^{n-1}.$$

即
$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

例 4　求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　由于 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$，

所以，
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\cos x.$$

即正弦函数 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $(\sin x)'=\cos x$.

同样，余弦函数 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也可导，并且 $(\cos x)'=-\sin x$.

例 5　求函数 $f(x)=a^x$（$a>0,a\neq 1$）的导数.

解
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a.$$

即指数函数的导数公式为
$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

特别地，当 $a=e$ 时，因 $\ln e=1$，故有

$$(e^x)'=e^x.$$

例 6　求函数 $f(x)=\log_a x$（$a>0,a\neq 1$）的导数.

解
$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}.\end{aligned}$$

即对数函数的导数公式为$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

特别地,当$a=e$时,有$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

三、单侧导数

类似于单侧极限,也有单侧导数.

定义 2 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad 与 \quad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

都存在,分别称为函数$f(x)$在x_0处左可导与右可导,其极限分别称为函数$f(x)$在x_0的**左导数与右导数,分别**记作$f'_-(x_0)$与$f'_+(x_0)$,即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

按照极限存在的意义,可以得到定理 1.

定理 1 函数$f(x)$在x_0可导$\Leftrightarrow$函数$f(x)$在x_0的左、右导数都存在,且相等,即$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

四、导数的几何意义

根据以上讨论知:函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$在几何上表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处切线的斜率k. 即

$$k=\tan\alpha=f'(x_0).$$

其中α是切线的倾斜角(见图 2-3).

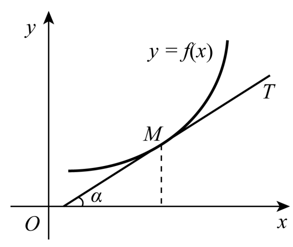

图 2-3

于是,曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线方程与法线方程分别为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

和
$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\,[f'(x_0)\neq 0].$$

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大，那么曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x=x_0$.

例 7　求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 处的切线方程与法线方程.

解　根据导数的几何意义，所求切线的斜率为

$$k_1=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}},$$

由于 $y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，于是

$$k_1=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

从而所求的切线方程为

$$y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\quad \text{即 } 4x+y-4=0.$$

所求法线的斜率为

$$k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{4}.$$

于是所求法线方程为

$$y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)\quad \text{即 } 2x-8y+15=0.$$

例 8　求曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 通过点 $(5,11)$ 的切线方程.

解　设切线在曲线上的切点为 (x_0,y_0)，因为

$$y'=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}\sqrt{x},$$

所以 $y'\Big|_{x=x_0}=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}$，于是切线方程为

$$y-y_0=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}(x-x_0),$$

又因为切线过 $(5,11)$ 点，所以有

$$11-y_0=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}(5-x_0)\quad \text{及}\quad y_0=x_0^{\frac{3}{2}},$$

联立上两方程解之得 $x_0=4,y_0=8$，

故所求切线方程为 $y-8=\frac{3}{2}\sqrt{4}(x-4)$，

即

$$3x-y-4=0.$$

五、函数可导与连续的关系

从导数的定义可知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ 存在，于是有

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$,

其中,当 $\Delta x\to 0$ 时,$\alpha\to 0$,即

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

显然,当 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x\to 0$. 这就是说,函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的.于是有定理 2.

定理 2 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

【注】该定理的逆命题不成立. 即函数在某点连续,但在该点不一定可导.

例 9 讨论 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 显然 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,又因为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1=f'_-(0),\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1=f'_+(0)$$

即 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$,所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

习题 2-1

1. 已知某物体作直线运动,其路程 s 是时间 t 的函数:

$$s=3t^2+2t+1.$$

求从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 之间的平均速度,并求当 $\Delta t=1$,$\Delta t=0.1$ 与 $\Delta t=0.001$ 的平均速度,再求在 $t=2$ 的瞬时速度,并比较其平均速度与瞬时速度的接近程度.

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时,物体就不断冷却,若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$,试确定该物体在时刻 t 的冷却速度.

3. 在下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在,按照导数的定义观察下列极限,分析并指出 A 表示什么?

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$,其中 $f(0)=0$,且 $f'(0)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=A\neq 0$.

4. 求下列曲线在指定点的切线方程与法线方程.

(1) $y=\sin x$,$x=\pi$;

(2) $y=x^3$,$x=2$;

(3) $y=e^x$,$x=0$.

5. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点,作过这两点的割线,求抛物线上平行于这条割线的切线方程.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geqslant 0 \\ x & x<0 \end{cases}$,求 $f_-'(0)$,$f_+'(0)$,又 $f'(0)$ 是否存在?

7. 讨论下列函数在指定点处的连续性和可导性.

(1) $y=|\sin x|\ (x=0)$;

(2) $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$,$(x=0)$;

(3) $y=\begin{cases} x^2+1 & 0\leqslant x<1 \\ 3x-1 & x\geqslant 1 \end{cases}$,$(x=1)$.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$,在 $x=1$ 处连续且可导,求 a,b 的值.

*　　*　　*　　*　　*　　*

9. 设 $f(x)=10x^2$,试按定义求 $f'(-1)$.

10. 证明:可导的偶函数的导数是奇函数,而可导的奇函数的导数是偶函数.

11. 证明:可导的周期函数的导函数仍为具有相同周期的周期函数.

12. 证明:若 $f(x)$ 为偶函数,且 $f'(0)$ 存在,则 $f'(0)=0$.

13. 证明:双曲线 $xy=a^2\ (a>0)$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

14. 用导数定义求 $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ \ln(1+x) & x\geqslant 0 \end{cases}$,在 $x=0$ 处的导数.

15. 已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0 \\ x, & x\geqslant 0 \end{cases}$,求 $f'(x)$.

§2.2　函数的求导法则

从导数的定义,我们已知求导数的步骤,但是对于任何函数,尤其是比较复杂的函数如果总是按照导数定义去求函数的导数,计算量很大,往往很困难.为此需将求导数运算公式化,并讨论求导数的运算法则.

一、导数的四则运算法则

定理 1　若函数 $u(x)$,$v(x)$ 在点 x 处可导,则它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在 x 处也可导,且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\ [v(x)\neq 0]$.

证明　在此只证明(2),(1)、(3)请读者自己证明.

设$f(x)=u(x)v(x)$,则

$$\begin{aligned}\Delta y&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-v(x+\Delta x)u(x)+v(x+\Delta x)u(x)-u(x)v(x)\\&=v(x+\Delta x)[u(x+\Delta x)-u(x)]+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)].\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

由于函数 $v(x)$在点 x 处可导,因此在点 x 处连续,故$\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$.
于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).\end{aligned}$$

即函数 $u(x)v(x)$在点 x 可导,且

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

定理1中的法则(1)(2)可以推广到任意有限个在同一点可导的函数情形. 例如,若函数 $u(x)$,$v(x)$和 $w(x)$在点 x 可导,则有

$$[u(x)\pm v(x)\pm w(x)]'=u'(x)\pm v'(x)\pm w'(x),$$

$$[u(x)v(x)w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x).$$

另外,在法则(2)中,当 $v(x)=C[v(x)=C$ 为常数$]$时,有

$$[Cu(x)]'=Cu'(x).$$

即常数因子可以提到导数符号外.

例1　设 $y=x^3-2x^2+e^x$,求 y'.

解　$y'=(x^3)'-(2x^2)'+(e^x)'=3x^2-4x+e^x$.

例2　设 $y=\dfrac{1}{x}+3\sin x-\cos\dfrac{\pi}{2}$,求 y',并求 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解　$y'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'+3(\sin x)'-\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}+3\cos x$,

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-\frac{16}{\pi^2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

例3　设 $y=2\sqrt{x}\cos x$,求 y'.

解　$y'=2[\sqrt{x}\cos x]'=2[(\sqrt{x})'\cos x+\sqrt{x}(\cos x)']$

$$=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\sin x.$$

例 4　求 $y=\tan x$ 的导数.

解　$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$,

即

$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

类似可得

$$(\cot x)'=-\csc^2 x.$$

例 5　求 $y=\sec x$ 的导数.

解　$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{(1)'\cos x-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$

即

$$(\sec x)'=\sec x\tan x.$$

类似可得

$$(\csc x)'=-\cot x\csc x.$$

二、反函数的导数

定理 2　设函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数,$x=\varphi(y)$ 在 y 可导,且 $\varphi'(y)\neq 0$,则 $y=f(x)$ 在 x 也可导,且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}},\tag{2-6}$$

即反函数的导数等于原函数导数的倒数.

例 6　求 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　函数 $y=\arcsin x(-1<x<1)$ 是函数 $x=\sin y\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数,所以

$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\text{时},\cos y>0\right).$

即

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同样可以求得

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},(\mathrm{arccot}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

例 7　求 $y=\arctan x$ 的导数.

解 函数 $y=\arctan x(-\infty<x<+\infty)$是函数 $x=\tan y\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$的反函数,所以

$$y'=(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

即

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

同样可以求得
$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

三、复合函数的求导法则

定理3 若函数 $u=g(x)$在点 x 可导,而 $y=f(u)$在点 $u=g(x)$可导,则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 也可导,且

$$[f(g(x))]'=f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

证明 设在 x 的改变量是 Δx,由函数 $u=g(x)$,有 u 的改变量 Δu,再由函数 $y=f(u)$,又有 y 的改变量 Δy,从而有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

已知函数 $y=f(u)$在点 u 可导,$u=g(x)$在点 x 可导,则

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u),\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x).$$

由第1节的定理1,$u=g(x)$在点 x,即当 $\Delta x\to 0$ 时,有 $\Delta u\to 0$,于是,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)g'(x).$$

复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 也可导,且$[f(g(x))]'=f'(u)\cdot g'(x)$.

例8 设 $y=(x^2-4)^2$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $y=u^2$,$u=x^2-4$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(u^2)'\cdot(x^2-4)'=2u\cdot 2x=4x(x^2-4).$$

例9 设 $y=\cos\dfrac{2x}{1+x^2}$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $y=\cos u$,$u=\dfrac{2x}{1+x^2}$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\cos u)'\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=-\sin u\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=-\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\sin\frac{2x}{1+x^2}.$$

对复合函数的运算比较熟悉以后,就不必再写出中间变量,只要分析清楚函数的复合关系,做到心中有数,就可以直接求出复合函数对自变量的导数.

例 10　设 $y=\ln\sin x$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x.$

例 11　设 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(1-2x^2)'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-4x)$$

$$=-\frac{4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 例如,设 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=\psi(x)$都可导,则

$$[f(\varphi(\psi(x)))]'=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

例 12　设 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(e^{\sin\frac{1}{x}})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

例 13　设 $x>0$,证明幂函数的导数公式:$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$(μ 为任意实数).

证明　$y=x^\mu$ 可以写成 $y=e^{\mu\ln x}$,于是

$$(x^\mu)'=(e^{\mu\ln x})'=e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'=x^\mu\cdot\mu\cdot\frac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}.$$

【注】复合函数求导既是重点又是难点,在求复合函数的导数时,首先要分清函数的复合层次,然后从外向里,逐层推进求导,不要遗漏,也不要重复.

四、基本求导法则与导数公式

为了便于记忆和使用,我们将前面学过的基本公式和运算法则总结如下.

1. 常数和基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$,(C 为常数);　(2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$(μ 为任意实数);

(3) $(\sin x)'=\cos x$;　(4) $(\cos x)'=-\sin x$;

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$;　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$;　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(9) $(a^x)'=a^x\ln a,(a>0,a\neq 1)$; (10) $(e^x)'=e^x$;

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},(a>0,a\neq 1)$; (12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},|x|<1$; (14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},|x|<1$;

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2},|x|<+\infty$; (16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2},|x|<+\infty$.

2. 函数的四则运算的求导法则

设 $u(x)$,$v(x)$在点 x 可导,则

(1) $[u\pm v]'=u'\pm v'$; (2) $(Cu)'=Cu'$;

(3) $[u\cdot v]'=u'v+uv'$; (4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

3. 反函数的求导法则

设函数 $x=\varphi(y)$是函数 $y=f(x)$的反函数,$x=\varphi(y)$在 y 可导,且 $\varphi'(y)\neq 0$,则 $y=f(x)$在 x 也可导,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} \quad 或 \quad f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

4. 复合函数的求导法则

若函数 $u=g(x)$在点 x 可导,而 $y=f(u)$在点 $u=g(x)$可导,则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 也可导,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad 或 \quad [f(g(x))]'=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

习题 2-2

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^4+\dfrac{7}{x^3}-\sqrt{x}+12$; (2) $y=2x^3-3^x+3e^x$;

(3) $y=\tan x+2\sec x-1$; (4) $y=\sin x\cdot\cos x$;

(5) $y=x^2\ln x$; (6) $y=3e^x\cos x$;

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; (8) $y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3$;

(9) $y=x^2\ln x\cos x$; (10) $s=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$;

(11) $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$;　　(12) $y=\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

2. 计算下列函数在指定点处的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

(1) $y=\sin x-\cos x\,(x=\pi/6,\pi/4)$;　　(2) $y=e^x(x^2-3x+1)\,(x=0)$;

(3) $y=x\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\left(x=\dfrac{\pi}{4}\right)$;　　(4) $y=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}\,(x=0)$.

3. 求下列函数的导数.

(1) $y=\cos(4-x)$;　　(2) e^{-3x^2};

(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;　　(4) $y=\tan(x^2)$;

(5) $y=\arctan(e^x)$;　　(6) $y=\sin^2 x$;

(7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(8) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$;

(9) $y=\ln(\ln x)$;　　(10) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

4. 求下列函数的导数.

(1) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;　　(2) $y=\sin^n x\cdot\cos nx$;

(3) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;　　(4) $y=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$;

(5) $y=(2+3x^2)\sqrt{1+5x^2}$;　　(6) $y=\ln\sqrt{x}+\sqrt{\ln x}$;

(7) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;　　(8) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$;

(9) $y=\sec^2\dfrac{x}{a}+\csc^2\dfrac{x}{a}$;　　(10) $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(11) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;　　(12) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;

(13) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;　　(14) $y=10^{x\tan 2x}$;

(15) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;　　(16) $y=\sin e^{x^2+x-2}$;

(17) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$;

(18) $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

5. 以初速度 v_0 竖直上抛的物体,其上升高度 s 与时间 t 的关系是

$$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2,$$

求:(1)该物体的速度 $v(t)$;(2)该物体达到最高点的时刻.

* * * * * *

6. 设$f(1-x)=xe^{-x}$，且$f(x)$可导，求$f'(x)$.

7. 设$f(x)$为可导函数，求下列函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

(1) $y=f(x^2)$；　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$；

(3) $y=f\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)$；　　(4) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$.

8. 证明下列双曲函数及反双曲函数的导数公式.

(1) $(\text{sh}x)'=\text{ch }x$；　　(2) $(\text{ch }x)'=\text{sh }x$；

(3) $(\text{th }x)'=\dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$；　　(4) $(\text{arsh}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

(5) $(\text{arch}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；　　(6) $(\text{arth }x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$.

9. 设函数$f(x)$满足下列条件.

(1) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，对一切$x,y\in R$；

(2) $f(x)=1+xg(x)$，而$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

试证明$f(x)$在$\mathbf{R}$上处处可导，且$f'(x)=f(x)$.

§2.3　高阶导数

我们知道，变速直线运动的速度$v(t)$是位移函数$s=s(t)$对时间t的导数，即

$$v=\frac{ds}{dt}\quad\text{或}\quad v=s'(t),$$

而加速度$a(t)$又是速度v对时间t的变化率，即速度v对时间t的导数，即

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)\quad\text{或}\quad a(t)=v'(t)=[s'(t)]'.$$

这就引出求导数的导数问题.

一、高阶导数的概念

定义　如果函数$y=f(x)$的导函数$f'(x)$在x处可导，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数$f(x)$在x的**二阶导数**，记作

$$y'',f''(x),\frac{d^2y}{dx^2}\text{或}\frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

即

$$f''(x)=[f'(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的一阶导数.

类似地，函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 x 的导数称为函数 $f(x)$ 在 x 的**三阶导数**，记作

$$y''',f'''(x),\frac{d^3y}{dx^3}\quad 或\quad \frac{d^3f(x)}{dx^3}.$$

一般地，$y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数在 x 的导数，称为 $y=f(x)$ 在 x 的 n **阶导数**，记作

$$y^{(n)},f^{(n)}(x),\frac{d^ny}{dx^n}\quad 或\quad \frac{d^nf(x)}{dx^n},$$

即
$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

二阶及二阶以上的导数，统称为高阶导数．有时为了叙述统一，相应地把 $f(x)$ 称为零阶导数.

由函数高阶导数的定义，求高阶导数就是按照前面的求导法则和导数公式接连多次求导.

例 1　设 $y=ax^2+bx+c$，求 y'''.

解　$y'=2ax+b,y''=2a,y'''=0$.

例 2　设 $s=\sin\omega t$，求 s''.

解　$s'=\cos\omega t(\omega t)'=\omega\cos\omega t,s''=-\omega\sin\omega t(\omega t)'=-\omega^2\sin\omega t$.

例 3　求 $y=e^{ax}$ 的 n 阶导数.

解　$y'=ae^{ax},y''=a^2e^{ax},\cdots,y^{(n)}=a^ne^{ax}$.

例 4　证明 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

证　先证明 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

当 $n=1$ 时，$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，即公式成立.

假设公式对 $n-1$ 成立，即

$$(\sin x)^{(n-1)}=\sin\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

于是有
$$\begin{aligned}(\sin x)^{(n)}&=\left\{\sin\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]\right\}'=\cos\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]\\&=\sin\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$
即公式对 n 成立.

所以
$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

同理可证
$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

例 5 求 $y=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x},y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2},y'''=\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^2},\cdots,y^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

即

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

类似的方法可得:$[(1+x)^{\alpha}]^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(x+1)^{\alpha-n}$.

二、高阶求导公式

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都具有 n 阶导数,则

1. $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$.

证明 当 $n=1$ 时已成立,假设公式对 $n-1$ 也成立,那么

$(u\pm v)^{(n)}=[(u\pm v)^{(n-1)}]'=[u^{(n-1)}\pm v^{(n-1)}]'=u^{(n)}\pm v^{(n)}$.

2. $(uv)^{(n)}=C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}+C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}+\cdots+C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$.

其中,$C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$,称为**莱布尼茨公式**.

证明 当 $n=1$ 时命题显然成立,假设公式对 $n-1$ 也成立,即

$$(uv)^{(n-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k u^{(k)}v^{(n-1-k)},$$

那么,对于 n

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)}&=[(uv)^{(n-1)}]'=[\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k u^{(k)}v^{(n-1-k)}]'\\&=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k u^{(k)}v^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k u^{(k+1)}v^{(n-1-k)}\\&=C_{n-1}^0u^{(0)}v^{(n)}+\sum_{k=1}^{n-1}[C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k]u^{(k)}v^{(n-k)}+C_{n-1}^{n-1}u^{(n)}v^{(0)}\\&=u^{(0)}v^{(n)}+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}+u^{(n)}v^{(0)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}.\end{aligned}$$

其中,$$\begin{aligned}C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m&=\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}+\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}\\&=\frac{(n-1)!}{m!(n-m)!}[m+(n-m)]\\&=\frac{n!}{m!(n-m)!}=C_n^m\end{aligned}$$

例 6 已知 $y=x^2e^{2x}$,求 $y^{(20)}$.

解 设 $y=uv,u=x^2,v=e^{2x}$,而

$u'=2x, u''=2, u^{(n)}=0, n\geqslant 3$，又 $v^{(n)}=2^n e^{2x}$，所以

$$y^{(20)}=(uv)^{(20)}=\sum_{k=0}^{20}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}=C_{20}^0u^{(0)}v^{(20)}+C_{20}^1u^{(1)}v^{(19)}+C_{20}^2u^{(2)}v^{(18)}$$

$$=x^2\cdot 2^{20}e^{2x}+20\cdot 2x\cdot 2^{19}e^{2x}+\frac{20\cdot 19}{2!}\cdot 2\cdot 2^{18}e^{2x}$$

$$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95).$$

习题 2-3

1. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=2x^2+\ln x$；　(2) $y=x\cos x$；

(3) $y=\tan x$；　(4) $y=\ln(1-x^2)$；

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；　(6) $y=(1+x^2)\arctan x$；

(7) $y=\dfrac{e^x}{x}$；　(8) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$，求 $f'''(2)$.

3. 设 $f''(x)$ 存在，求下列函数的二阶导 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(1) $y=f(x^2)$；　(2) $y=\ln[f(x)]$.

4. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$（A,ω 是常数），求物体运动的加速度，并验证：

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0.$$

5. 验证 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$（$\lambda, C_1, C_2$ 是常数）满足关系式

$$y''-\lambda^2 y=0.$$

6. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式 $y''-2y'+2y=0$.

*　*　*　*　*　*

7. 已知 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & x<0\\ \ln(1+x) & x\geqslant 0\end{cases}$，在 $x=0$ 处有二阶导数，试确定参数 a,b,c 的值.

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式.

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$（$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数）；

(2) $y=\sin^2 x$；

(3) $y=xe^x$；

(4) $y=x\ln x$.

9. 设函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 都存在二阶导数，求复合函数 $y=f(g(x))$ 的二阶导数.

10. 证明：函数 $f(x)$ 是 n 次多项式，a 是方程 $f(x)=0$ 的 k（$k\leqslant n$）重根的充要条件是

$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)$,而$f^{(k)}(a)\neq 0$.

§2.4 隐函数与参数方程的求导法则

一、隐函数的导数

函数 $y=f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系,这种对应关系可以用各种不同方式表达. 前面我们所讨论的函数,例如 $y=\sin x$,$y=\ln\sqrt{1-x^2}$ 等都是对于因变量 y 已写成自变量 x 的明显表达式,这种方式表达的函数叫作显函数. 但有时还会遇到函数关系不是用显函数表示的情形. 例如,中心在原点的单位圆方程

$$x^2+y^2=1.$$

又如

$$e^y=xy.$$

它们都表示 y 与 x 之间的函数关系. 因为当变量 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时,在一定条件下,变量有确定的值与之对应. 如当 $x=1$ 时,$y=0$;当 $x=0$ 时,$y=1$($y\geqslant 0$ 的条件下);等等. 我们把这种由二元方程 $F(x,y)=0$ 表示的因变量 y 与自变量 x 的函数关系,称为**隐函数**.

一般地,如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$,在一定条件下,当 x 取某区间内的任一值时,相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在,则称此对应关系是二元方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**.

值得注意的是,有些二元方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 并不能用代数方法从中解出来,换句话说,隐函数不是初等函数或不能化为显函数.

我们假设本节所讨论的隐函数都是存在的,即由方程 $F(x,y)=0$ 能确定出唯一的函数 $y=f(x)$,且是可导的. 于是,

$$F[x,f(x)]=0.$$

利用复合函数求导法则,对等式两边关于 x 求导,再解出 $f'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}$,这就是**隐函数求导法**.

例 1 求由方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数.

解 方程两端对自变量 x 求导数,并把 y^2 看作复合函数,得

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0.$$

解得隐函数的导数

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

例 2 求由方程 $e^y=xy$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数.

解　方程两端对 x 求导数,由复合函数的求导法则,得

$$e^y y' = y + xy',$$

解得隐函数的导数

$$y' = \frac{y}{x - e^y} = \frac{y}{x - xy} = \frac{y}{x(1-y)}.$$

例 3　求椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在点 $\left(2, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处的切线方程(见图 2-4).

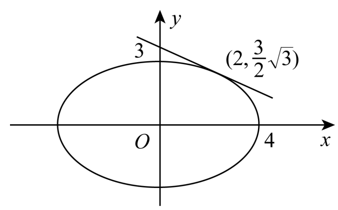

图 2-4

解　方程两端对 x 求导,并由复合函数的求导法则得

$$\frac{2x}{16} + \frac{2yy'}{9} = 0,$$

于是,$y' = -\frac{9x}{16y}$,

即切线斜率

$$k = y'\Big|_{x=2} = -\frac{9 \times 2}{16 \times 3\sqrt{3}/2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

从而切线方程为

$$y - \frac{3}{2}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2) \quad 即 \quad \sqrt{3}x + 4y - 8\sqrt{3} = 0.$$

【注】在隐函数的求导过程中,若出现关于 y 的函数 $g(y)$ 时,对此函数求导,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[g(y)] = g'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g'(y)y'.$$

二、对数求导法

求某些显函数的导数,直接求它的导数比较烦琐,这时可将它化为隐函数,用隐函数的求导法则求其导数,比较简便.

将显函数化为隐函数的常用方法是等号两端取对数,称为**对数求导法**.

例 4　求 $y = x^{\sin x}$ 的导数.

解　两边取对数,得

$$\ln y = \sin x \ln x,$$

再对 x 求导,得

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

解得　$y' = y\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$

也可以用以下方法.

$$y=x^{\sin x}=e^{\sin x\ln x}.$$

对于一般形式的幂指函数

$$y=u(x)^{v(x)}\,[u(x)>0],$$

如果 $u(x)$,$v(x)$ 都可导,则可像例 4 一样利用对数求导求出幂指函数的导数,也可以把幂指函数表示为

$$y=u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}.$$

这样,便可直接求导,得

$$y'=e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right)=[u(x)]^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right).$$

例 5 求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数 y'.

解 等式两边取对数(假定 $x>4$),得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)],$$

上式两边对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right],$$

于是

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

三、参数方程所确定的函数的导数

一般地,若参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}\tag{2-7}$$

确定 y 与 x 之间的函数关系,则称此函数关系所表达的函数为由**参数方程(2-7)所确定的函数**.

例如,

$$\begin{cases}x=r\cos t\\y=r\sin t\end{cases},(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

表示以 r 为半径,圆心在原点的圆周方程.

一般地,设 $x=\varphi(t)$ 具有连续单调的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,则 y 是 x 的复合函数,即

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)).$$

假设 $x=\varphi(t)$ 与 $y=\psi(t)$ 都可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$. 于是由复合函数与反函数的求导法则,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\psi'(t)[\varphi^{-1}(t)]'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

这就是**参数方程的求导公式**.

类似地,如果再假定 $x=\varphi(t)$ 与 $y=\psi(t)$ 二阶可导,则可以得到参数方程的二阶导数公式

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例 6　求由参数方程 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 所表示的函数 $y=f(x)$ 的一、二阶导数.

解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2t}{1+t^2}\Big/\frac{1}{1+t^2}=2t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=2(1+t^2).$$

例 7　求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 相应的点处的切线方程.

解　当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时,对应的点为 $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$(见图 2-5).

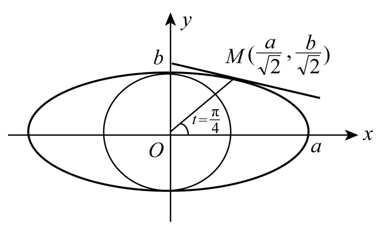

图 2-5

而切线斜率为

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a},$$

于是切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}b=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right).$$

即:
$$bx+ay-\sqrt{2}ab=0.$$

习题 2-4

1. 求下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $y^2-2xy+9=0$;　　　　(2) $x^3+y^3-3axy=0$;

(3) $xy=e^{x+y}$;　　(4) $y=1-xe^{y}$;

(5) $\sin(xy)=x$;　　(6) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$处的切线方程和法线方程.

3. 求下列方程所确定的隐函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(1) $x^2-y^2=1$;　　(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

(3) $y=\tan(x+y)$;　　(4) $y=1+xe^{y}$.

4. 用对数求导法求下列函数的导数.

(1) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$;　　(2) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$;　　(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^{x}}}$;

(5) $y=(\tan x)^{\sin x}+x^{x}$.

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

(1) $\begin{cases}x=at^2\\y=bt^3\end{cases}$;　　(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta)\\y=\theta\cos\theta\end{cases}$.

6. 求下列曲线在指定点处的切线方程和法线方程.

(1) $\begin{cases}x=\sin t\\y=\cos 2t\end{cases}\left(t=\dfrac{\pi}{4}\right)$;　　(2) $\begin{cases}x=3at/(1+t^2)\\y=3at^2/(1+t^2)\end{cases}(t=2)$.

7. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(1) $\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2}\\y=1-t\end{cases}$;　(2) $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$;　(3) $\begin{cases}x=3e^{-t}\\y=2e^{t}\end{cases}$.

*　*　*　*　*　*

8. 若曲线由极坐标方程 $\rho=f(\theta)$ 表示,则曲线可化为以极角 θ 为参数的参数方程

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta=f(\theta)\cos\theta\\y=\rho\sin\theta=f(\theta)\sin\theta\end{cases},$$

求$\dfrac{dy}{dx}$.

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数$\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

（1）$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$；　　　　（2）$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$.

10. 落在平静水面上的石头，产生同心波纹，若最外一圈波半径的增大率总是 $6m/s$，问在 2 秒末扰动水面面积的增大率为多少？

11. 水注入深 8 米，上顶直径 8 米的正圆锥形容器中，其速率为每分钟 4 立方米，当水深为 5 米时，其表面上升的速率为多少？

12. 在中午十二点整甲船以 6 千米/小时的速率向东行驶，乙船在甲船之北 16 千米处，以 8 千米/小时的速率向南行驶，问下午一点整两船的相距速率为多少？

§2.5　函数的微分

导数的概念反映了函数相对于自变量的变化快慢的程度，当自变量 x 有微小的变化时，函数 $y = f(x)$ 的微小改变量为

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

对于较复杂的函数而言，其差值 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 可能是一个比较复杂的表达式．如何把复杂问题化为简单问题，微分就是解决这类问题的数学模型．

一、微分的定义

首先分析一个具体的实例．

若有一边长为 x_0 的正方形金属薄片，受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$，试问此薄片的面积改变了多少？（见图 2-6）

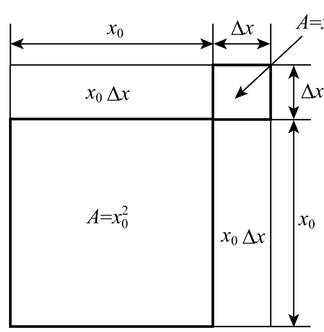

图 2-6

设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 A 与 x 的函数关系为

$$A = x^2.$$

金属薄片受温度变化的影响时面积的改变量可以看成是当自变量 x 自 x_0 取到增量 Δx 时，函数 $A = x^2$ 相应的增量，即

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

从上式可以看出，ΔA 由两部分组成．

第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性部分；而第二部分 $(\Delta x)^2$，当 $\Delta x \to 0$ 时，第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小，即 $(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$．由此可见，如果边长的改变很微小，即 $|\Delta x|$ 很小时，面积的改变量 ΔA 可以近似地用第一部分来代替，即

$$\Delta A \approx 2x_0\Delta x.$$

一般地，如果函数 $y = f(x)$ 满足一定条件，那么函数增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 可以表

示为

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数,因此 $A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数,且 Δy 与它的差

$$\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$$

是比 Δx 高阶的无穷小．所以,当 $|\Delta x|$ 很小时,我们就可以用 Δx 的线性函数 $A\Delta x$ 来近似代替 Δy.

根据以上特性,我们给出如下定义．

定义 设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义,x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在该区间内,如果函数 $f(x)$ 的增量

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$

可以表示为

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

其中,A 是不依赖于 Δx 的常数,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**,并称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**微分**,记作 $\mathrm{d}y$. 即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

【注】由定义可以看出,若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微,则

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;

(2) $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$,即 $\Delta y - \mathrm{d}y$ 是 Δx 的高阶无穷小;

(3) 当 $A\neq 0$ 时,$\mathrm{d}y$ 与 Δy 是等价无穷小,即

$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}y + o(\Delta x)}{\mathrm{d}y} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A\Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0).$$

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微,即 $\mathrm{d}y = A\Delta x$,那么常数 $A=$? 下面的定理回答了这个问题．

二、函数可微的条件

定理 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导．

证明 必要性"$\Rightarrow$"

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微,即

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), (\Delta x \to 0)$$

其中,A 是与 Δx 无关的常数．用 Δx 除上式,得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

从而,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $A = f'(x_0)$.

充分性"$\Leftarrow$",设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

即
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\frac{\alpha}{\Delta x},\alpha\to 0(\text{当 }\Delta x\to 0\text{ 时}).$$

从而，
$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),(\Delta x\to 0)$$

其中，$f'(x_0)$是与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$是比 Δx 高阶的无穷小，于是$f(x)$在点 x_0 处可微．

定理指出，函数 $y=f(x)$在点 x_0 可微与可导是等价的，并且 $A=f'(x_0)$．于是，函数 $y=f(x)$在点 x_0 的微分一定是
$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x.$$

例 1　求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的微分．

解　因 $y'=2x$，于是 $\mathrm{d}y=y'\Delta x=2x\Delta x$，所以
$$\mathrm{d}y\bigg|_{x=1}=2\cdot 1\cdot\Delta x=2\Delta x,\quad \mathrm{d}y\bigg|_{x=3}=2\cdot 3\cdot\Delta x=6\Delta x.$$

例 2　求函数 $y=x^3$ 在 $x=2$ 和 $\Delta x=0.02$ 时的微分．

解　由 $y'=3x^2$，得 $\mathrm{d}y=y'\Delta x=3x^2\Delta x$，所以
$$\mathrm{d}y\big|=3\cdot 2^2\cdot 0.02=0.24.$$

函数 $y=f(x)$在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $df(x)$，即
$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x.$$

例如，函数 $y=\sin x$ 的微分为 $\mathrm{d}y=\cos x\Delta x$，$y=\ln x$ 的微分为 $\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\Delta x$.

由微分的定义，函数 $y=x$，有　$\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=(x)'\Delta x=\Delta x$，即自变量 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 等于自变量 x 的增量 Δx，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$，称为自变量的微分．

于是，函数 $y=f(x)$的微分又可以写成
$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

从而有
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

这就是说，函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商等于该函数的导数．因此，导数 $f'(x)$也称为“微商”.

三、微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解，我们来说明微分的几何意义．

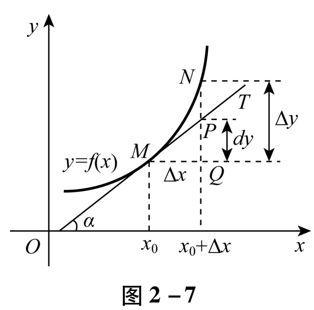

图 2-7

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$的图形是一条曲线（见图2-7），在曲线上取两点 $M(x_0,y_0)$和 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$.

过点 M 作曲线的切线 MT，设其倾斜角为 α，则
$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=QN$$
$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=MQ\tan\alpha=QP$$

由此可见，当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的纵坐标增量时，$\mathrm{d}y$ 就是曲线 $y=f(x)$ 的切线 MT 在点 $M(x_0,y_0)$ 的纵坐标的相应增量．

当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y-\mathrm{d}y|$ 比 Δx 更小．因此，在点的 M 的邻近，我们可以用切线段来近似代替曲线段．即在局部范围内用线性函数近似代替非线性函数．在几何上就是局部用切线段近似代替曲线段．这在数学上称为非线性函数的局部线性化，这是微分学的基本思想方法之一．这种思想方法在自然科学和工程问题的研究中是经常采用的．

四、微分公式和运算法则

由 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 知，求已知函数的微分，只要求出函数的导数，再乘上自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 即可．因此，由导数公式和导数的运算法则可相应地得到微分的基本公式和微分的运算法则．

1. 基本初等函数的微分公式

导数公式	微分公式
（1）$(C)'=0$（C 为常数），	$d(C)=0.$
（2）$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$（μ 为任意实数），	$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x.$
（3）$(\sin x)'=\cos x$，	$d(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x.$
（4）$(\cos x)'=-\sin x$，	$d(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x.$
（5）$(\tan x)'=sec^2x$，	$d(\tan x)=\sec^2x\mathrm{d}x.$
（6）$(\cot x)'=-csc^2x$，	$d(\cot x)=-\csc^2x\mathrm{d}x.$
（7）$(\sec x)'=\sec x\tan x$，	$d(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x.$
（8）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$，	$d(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x.$
（9）$(a^x)'=a^x\ln a$，$(a>0,a\neq1)$，	$d(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x.$
（10）$(e^x)'=e^x$，	$d(e^x)=e^x\mathrm{d}x.$
（11）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，$(a>0,a\neq1)$，	$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x.$
（12）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，	$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x.$
（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\|x\|<1$，	$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$
（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\|x\|<1$，	$d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$
（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，$\|x\|<+\infty$，	$d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$
（16）$(\mathrm{arccot}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$，$\|x\|<+\infty$，	$d(\mathrm{arccot}x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

函数和、差、积、商的导数法则：	函数和、差、积、商的微分法则：
(1) $[u\pm v]'=u'\pm v'$,	$d(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v$.
(2) $(Cu)'=Cu'$,	$d(Cu)=C\mathrm{d}u$.
(3) $[u\cdot v]'=u'v+uv'$,	$d(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$
(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$,	$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}(v\neq 0)$.

以微分乘积的运算法则为例证明如下.

因为 $$(uv)'=vu'+uv', \text{而 } \mathrm{d}u=u'\mathrm{d}x, \mathrm{d}v=v'\mathrm{d}x.$$

所以 $$\mathrm{d}(uv)=(vu'+uv')\mathrm{d}x=v(u'\mathrm{d}x)+u(v'\mathrm{d}x)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v.$$

3. 复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y=y'_x\mathrm{d}x=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $g'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，所以复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

由此可见，无论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 保持不变. 此性质称为微分形式的不变性.

例 3　$y=\sin(2x+1)$，求 $\mathrm{d}y$.

解　由于 $y=\sin u$, $u=2x+1$，而 $\mathrm{d}y=\cos u$, $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$，所以

$$\mathrm{d}y=\cos u\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\cdot 2\mathrm{d}x=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x.$$

例 4　$y=\ln(1+e^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=d\ln(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}e^{x^2}d(x^2)\\&=\frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}2x\mathrm{d}x=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 5　$y=e^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\cos x de^{1-3x}+e^{1-3x}d\cos x\\&=e^{1-3x}\cos x d(1-3x)+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)\mathrm{d}x\\&=-3e^{1-3x}\cos x\mathrm{d}x-e^{1-3x}\sin x\mathrm{d}x=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 6　(1) $d(\quad)=x\mathrm{d}x$；(2) $d(\quad)=\cos\omega t\mathrm{d}t$.

解　(1) 因 $d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$，那么 $d\left(\dfrac{x^\mu}{\mu}\right)=x^{\mu-1}\mathrm{d}x$，令 $\mu=2$，有

$d\left(\dfrac{x^2}{2}\right)=x\mathrm{d}x$. 一般地，$d\left(\dfrac{x^\mu}{2}+C\right)=x^{\mu-1}\mathrm{d}x$，$C$ 为任意常数.

(2) 因为 $d(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\mathrm{d}t$，所以$\frac{1}{\omega}d(\sin\omega t)=\cos\omega t\mathrm{d}t$.

五、微分在近似计算中的应用举例

1. 近似计算

由微分的定义可知，当$f'(x_0)\neq 0$，且$|\Delta x|$很小时，有：

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x \tag{2-8}$$

或

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{2-9}$$

(2－9)中令 $x_0+\Delta x=x$，即 $\Delta x=x-x_0$，那么(2－9)式可改写为

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2-10}$$

当$f(x_0)$与$f'(x_0)$都容易计算，那么可利用(2－8)式来近似计算 Δy，利用(2－9)来近似计算$f(x_0+\Delta x)$，或利用(2－10)来近似计算$f(x)$.

例 7 一个外直径为 8cm 的球，球壳的厚度为$\frac{1}{24}$cm，求该球壳体积的近似值.

解 已知半径为 r 的球体积 $V=f(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$，

当 $r=4\mathrm{cm}$，$\Delta r=-1/24\mathrm{cm}$ 时，

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V=f'(4)\cdot\left(-\frac{1}{24}\right)=4^3\pi\cdot\left(-\frac{1}{24}\right)\approx -8.3776,$$

所以该球壳体积为 8.3776.

例 8 利用微分计算 $\sin 30°30'$的近似值.

解 令$f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x$，取 $x_0=30°=\frac{\pi}{6}$，$\Delta x=30'=\frac{\pi}{360}$，由式(2－9)得

$$\begin{aligned}\sin 30°30'&=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\\&=\sin x_0+\Delta x\cos x_0=\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\cos\frac{\pi}{6}\\&=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{360}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.5000+0.0076=0.5076.\end{aligned}$$

$\sin 30°30'$的准确值为 0.507538….

例 9 计算$\sqrt{1.05}$的近似值.

解 令$f(x)=\sqrt{x}$，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，取 $x_0=1$ 和 $\Delta x=0.05$，那么

$$\begin{aligned}\sqrt{1.05}&=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\\&=f(x_0)+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}}=\sqrt{1}+\frac{0.05}{2\times\sqrt{1}}=1.025.\end{aligned}$$

直接开方得，$\sqrt{1.05}=1.024695\cdots$.

下面我们推导一些常用的近似公式．为此，在(2－10)式中令 $x_0=0$，于是得到

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x,（当 |x| 很小时）\tag{2-11}$$

应用上式可以得到以下几个常用的近似公式(假当 $|x|$ 很小)：

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{n}$；

(2) $\sin x\approx x$（x 用弧度单位来表示）；

(3) $\tan x\approx x$（x 用弧度单位来表示）；

(4) $e^x\approx 1+x$；

(5) $\ln(1+x)\approx x$.

2. 误差估计

先介绍关于误差的两个术语．

设某个量的精度值为 A，它的近似值为 a，则 A 与 a 之差的绝对值 $|A-a|$ 称为 a 的**绝对误差**；绝对误差与 a 的比值 $\dfrac{|A-a|}{|a|}=\left|\dfrac{A-a}{a}\right|$ 称为 a 的**相对误差**．

如果 $|A-a|\leqslant\delta_A$，则称 δ_A 为 a 的**绝对误差限**；而 $\dfrac{\delta_A}{|a|}$ 称为 a 的**相对误差限**．

一般地，用直接测量 x 的值按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时，如果已知测量 x 的绝对误差限是 δ_x，即 $|\Delta x|\leqslant\delta_x$，那么当 $y'\neq 0$ 时，y 的绝对误差

$$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|y'||\Delta x|\leqslant|y'|\delta_x.$$

即 y 的绝对误差限为

$$\delta_y=|y'|\delta_x.\tag{2-12}$$

y 的相对误差限为

$$\frac{\delta_y}{|y|}=\left|\frac{y}{\ }\right|\delta_x.\tag{2-13}$$

例 10　已知圆钢直径 $D=60.03\mathrm{mm}$，测量 D 的绝对误差限 $\delta_D=0.05\mathrm{mm}$，试估计圆钢截面积 A 的误差．

解　由于 $A=\dfrac{\pi}{4}D^2$，而 $A'=\dfrac{\pi}{2}D$，$\delta_D=0.05\mathrm{mm}$，那么

$$\delta_A=|A'|\delta_D=\frac{\pi}{2}D\delta_D=\frac{\pi}{2}\cdot 60.03\times 0.05\approx 4.715(\mathrm{mm}^2);$$

$$\frac{\delta_A}{A}=\frac{A}{\ }\delta_D=\frac{\pi D/2}{\pi D^2/4}\delta_D=\frac{2\delta_D}{D}=\frac{2\times 0.05}{60.03}\approx 0.17\%.$$

习题 2－5

1. 已知 $y=2x-x^3$，计算在 $x=2$ 处，当 Δx 分别为 1，0.1，0.01 时的 Δy 和 $\mathrm{d}y$ 的值．

2. 求下列函数的微分.

(1) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$;　　(2) $y=\frac{x}{1+x^2}$;

(3) $y=x\sin 2x$;　　(4) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(5) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;　　(6) $y=\tan^2(1+2x^2)$.

3. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立.

(1) $d(\quad)=3x\mathrm{d}x$;　　(2) $d(\quad)=\sin\omega x\mathrm{d}x$;

(3) $d(\quad)=e^{-2x}\mathrm{d}x$;　　(4) $d(\quad)=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(5) $d(\quad)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$;　　(6) $d(\quad)=\frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x$;

(7) $d(\quad)=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$;　　(8) $d(\quad)=\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\mathrm{d}x$.

4. 利用微分计算下列各式的近似值.

(1) $\cos 29°$;　　(2) $\tan 136°$;

(3) $\arcsin 0.5002$;　　(4) $\arctan 1.05$;

(5) $\sqrt[3]{730}$;　　(6) $\ln 1.002$.

5. 扩音器插头为圆柱形,截面半径 r 为 0.15cm,长度 l 为 4cm,为了提高它的导电性能,要在该圆柱的侧面镀上一层厚为 0.001cm 的铜,问每个插头约需多少克铜(铜的密度为 $8.9\mathrm{g/cm^3}$)?

6. 已知测量球的直径 D 有 1% 的相对误差,问用公式 $V=\frac{\pi}{6}D^3$ 计算球的体积时,相对误差有多大?

*　　*　　*　　*　　*　　*

7. 求由方程 $\cos(xy)=x^2y^2$ 所确定的函数 y 的微分.

8. 设 $y=a^x+\sqrt{1-a^{2x}}\arccos(a^x)$,求 $\mathrm{d}y$.

9. 当 $|x|$ 较小时,证明下列近似公式.

(1) $\tan x\approx x$(x 是角的弧度值);

(2) $\ln(1+x)\approx x$;

(3) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$;

(4) $e^x\approx 1+x$.

并计算 $\sqrt[3]{1.02}$ 和 $e^{2.002}$ 的近似值.

10. 设扇形的圆心角 $\alpha=60°$,半径 $r=100\mathrm{cm}$,如果 r 不变,α 减少 $30'$,问扇形面积大约改变多少?又如果 α 不变,r 增加 1cm,问扇形面积大约改变多少?

实验二　用 Matlab 求一元函数的导数

一、实验目的

1. 熟悉和掌握 Matlab 求解函数导数的命令.
2. 掌握 Matlab 求解不同类型函数导数的命令和方法.
3. 掌握利用 Matlab 软件求微分等与导数相关的概念.

二、实验环境

1. 硬件:PC 机.
2. 软件:Windows 操作系统、Matlab 软件(Matlab R2015b 及以上).

三、实验方法

在 Matlab 中,微分和求导都可以由函数 diff 实现. diff 函数可同时处理数值和符号两种情况下的求导和微分. 该函数的调用格式如下所示.

1. diff(F):对函数返回独立变量求微分,F 为符号表达式.
2. diff(F,'a'):对 a 变量求微分,F 为符号表达式.
3. diff(F,n):对函数返回的独立变量求 n 次微分,F 为符号表达式;
4. diff(F,'a',n)或 diff(F,n,'a'):对变量 a 求 n 次微分,F 为符号表达式.

四、实验内容

例 1　已知 $f(x)=ax^2+bx+c$,求 $f(x)$ 的导数.

解

```
>> syms x a b c y              % 定义函数变量
>> y = a * x^2 + b * x + c;    % 定义函数表达式
>> diff(y)                     % 对默认变量求一阶微分
>> pretty(ans)                 % 使一阶微分结果变得更加直观
```

按回车键,结果为:

```
ans =
b + 2 * a * x
b + 2ax
>> diff(y,'a')                 % 对符号变量求一阶微分
ans =
x^2
```

```
>> diff(y,'x',2)                    % 对符号变量求二阶微分
ans =
2*a
>> diff(y,3)                        % 对默认变量求三阶微分
ans =
0
```

例 2 求参数方程$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$在 $t=\dfrac{\pi}{4}$处的导数值.

分析: 若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定了 y 是 x 的函数,则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}$或$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

解

```
>> syms x y t a
>> x = a*(cos(t))^3;
>> y = a*(sin(t))^3;
>> y1 = diff(y,t)/diff(x,t)          % 求参数函数导数
y1 =
-sin(t)/cos(t)
>> f = inline(y1);                   % 将导函数设置为内联函数
>> f(pi/4)
ans =
    -1.0000
```

例 3 求$f(x)=\dfrac{(x-1)^5}{\sin(x+1)}$的微分.

解

```
>> syms x y
>> y = (x-1)^5/sin(x+1);
>> diff(y)
ans =
(5*(x-1)^4)/sin(x+1) - (cos(x+1)*(x-1)^5)/sin(x+1)^2
```

所以$f(x)=\dfrac{(x-1)^5}{\sin(x+1)}$的微分 $dy=\dfrac{5(x-1)^4}{\sin(x+1)}dx-\dfrac{\cos(x+1)(x-1)^5}{\sin(x+1)^2}dx$.

例 4 求 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线方程和法线方程.

解

```
>> syms x y
>> y = exp(x);y1 = diff(y);f = inline(y1);k = f(0);k2 = -1/k;x0 = 0;y0 = 1;
>> y2 = k*x-k*x0+y0                  % 切线方程
```

```
y2 =
    x + 1
>> y3 = k2 * x - k * x0 + y0            % 法线方程
    y3 =
      1 - x
```

所以得出切线方程和法线方程为 $x+1$ 和 $1-x$，接下来我们尝试做出原函数、切线方程和法线方程图像．

```
ezplot(y,[-10,10]),hold on
ezplot(y2,[-10,10]),hold on
ezplot(y3,[-10,10]),hold on
text(0,1,'切点')
```

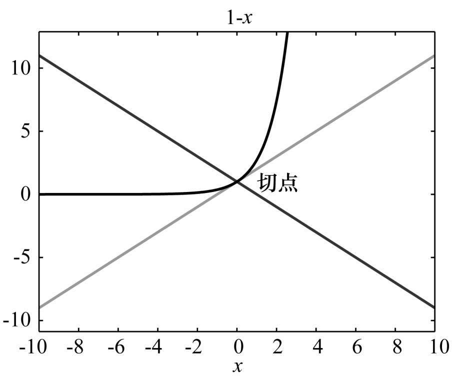

图 2－8

总习题二

1. 在“充分”“必要”“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内．

（1）$f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的__________条件，$f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的__________条件．

（2）$f(x)$ 在点 x_0 的右导数 $f'_+(x_0)$ 及左导数 $f'_-(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的__________条件．

（3）$f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的__________条件．

2. 已知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2$，则 $f'(1)=$__________．

3. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$，则 $f'(0)=$__________．

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$__________；$b=$__________．

5. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0\end{cases}$; (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

6. 当 k 为何值时,函数

$$f(x)=\begin{cases}x^k\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

(1) 在 $x=0$ 处连续;(2) 在 $x=0$ 处可导.

7. 设 $f(x)=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$,$(\varphi(x)>0,\varphi(x)\neq 1,\psi(x)>0)$,$\varphi(x)$,$\psi(x)$ 均为可导函数,求 $f'(x)$.

8. 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin(\sin x)$; (2) $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\cdot\left(\dfrac{x}{a}\right)^b(a>0,b>0)$;

(3) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$; (4) $y=\sin[\cos^2(x^3+x)]$;

(5) $x^y=y^x\left(求\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$; (6) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

9. 求下列函数的指定阶的导数.

(1) $y=\cos^2 x$,求 $y^{(n)}$; (2) $y=\dfrac{1}{2+x-x^2}$,求 $y^{(n)}$;

(3) $y=\sqrt[m]{1+x}$,求 $y^{(n)}$; (4) $y=(x^3-1)\ln x$,求 $y^{(20)}$.

10. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y=\sin(x+y)$ 所确定,求 y''.

11. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$及二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$; (2) $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$.

12. 利用微分计算下列各式的近似值.

(1) $\sin 31°$; (2) $\sqrt[5]{34}$; (3) $\operatorname{arccot}1.003$.

13. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $[6,f(6)]$ 处的切线方程.

14. 试证抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上任一点的切线与二坐标轴相截的截距之和等于 a.

15. 设炮弹以初速度 v_0,沿水平成 α 角的方向射出,若不计空气阻力,则运动方程为

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = (v_0\sin\alpha)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

其中,t 为时间,g 为重力加速度,试求:

（1）运动的轨迹方程;

（2）炮弹在任一时刻 t 的水平方向速度及垂直方向速度,并给出在时刻 t 的速度大小和方向;

（3）炮弹在任一时刻 t 的水平方向加速度及垂直方向加速度,并给出在时刻 t 的加速度的大小.

16. 当正在高度 H 水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时,从飞机到机场的水平地面距离为 L. 假设飞机下降的路径为三次函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图形,其中 $y\Big|_{x=-L} = H$,$y\Big|_{x=0} = 0$. 试确定飞机的降落路径.