第 3 章

向量组与向量空间

通常情况下，我们谈一个点、一条线或是一个图形时，需要告知是在直线、平面或是三维空间里讨论，因为这些对象在不同空间里的直观形象和性质有很大差异. 有没有一种途径可以把这些空间里的对象统一起来研究呢？答案是肯定的，那就是向量. 向量可以看作是线性空间或向量空间中的一个基本元素. 向量与点不同，向量表示的是两点之间的位移而不是固定的位置，但也可以用点与固定点(常取为原点)得到相应的向量. 这样一来，不论是数轴上的点、平面上的点，或者是三维空间的点都可以用“向量”统一起来了.

向量相比“点”具有很大的优越性. 点离不开坐标系，一个点离开了坐标系就无法表示；点不能表示方向，因此是静态的. 而向量是独立于坐标系的，因此在描述向量的加法、数乘等运算的几何解释时不用画出坐标系；向量还可以确定方向. 向量的线性运算(加法、数乘)还有直观的几何意义. 但在生产实践中，比如生产制造、航空、航天、国民经济等领域，各要素的状态动辄要用百万维的量来描述，不可能用直观的二维、三维量来描述和研究，这时就用维度更高的向量来描述就显得非常自然. 在当今科学水平下，向量是应用范围很广的一个基本概念，人们还把向量推广到 n 维空间或无穷维空间中描述更一般的研究对象.

3.1　向量及其线性运算

3.1.1　向量的定义

定义 3.1.1　n 个数组成的有序数组 a_1，a_2，…，a_n 称为 n **维向量**. 若 n 维向量写成

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的形式，则称之为 n 维**列向量**；若 n 维向量写成 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的形式，则称之为 n 维**行向量**. 这 n 个数称为该向量的 n 个**分量**，第 i 个数 a_i 称为该向量的第 i 分量. 由向量的定义可见，行向量可以看成是列向量的转置，常用黑体小写字母 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 等来代表列向量，而用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}$ 等来代表行向量. 除非特别声明，本书一般只讨论列向量.

注 1：分量全为实数的向量称为**实向量**，分量为复数的向量称为**复向量**. 除非特别声明，本书一般只讨论实向量.

注 2：分量都是零的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$.

3.1.2　向量的线性运算

从 n 维向量的定义可见，n 维列向量就是一个 $n \times 1$ 的列矩阵，n 维行向量就是一个 $1 \times n$ 的行矩阵. 因此，向量的运算可按矩阵的运算来定义.

设 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，$k \in \mathbf{R}$，则有

（1）向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和为 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$.

（2）向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数 k 的数量乘积为 $k\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$；特别地，向量 $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的**负向量**，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.（向量的加法与数乘运算统称为向量的**线性运算**.）

（3）向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差为 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$.

(4) 向量的乘积：$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

(5) 若向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的对应分量都相等，即$a_i=b_i(i=1, 2, \cdots, n)$，则称这两个向量是相等的，记作$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

例 1　某工厂两天生产的产量(单位：t)按产品顺序用向量表示，第一天为$\boldsymbol{\alpha}_1=(15, 20, 17, 8)^{\mathrm{T}}$，第二天为$\boldsymbol{\alpha}_2=(16, 22, 18, 9)^{\mathrm{T}}$，则两天各产品的产量和为

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(15, 20, 17, 8)^{\mathrm{T}}+(16, 22, 18, 9)^{\mathrm{T}}=(31, 42, 35, 17)^{\mathrm{T}}.$$

向量的线性运算具有矩阵的线性运算所具有的所有运算性质.

设$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$为n维向量，k，$l\in\mathbf{R}$，则有

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

例 2　设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-3\boldsymbol{\gamma}$；

(2) 若有$\boldsymbol{x}$，满足$3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+5\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，求$\boldsymbol{x}$.

解　(1) $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-3\boldsymbol{\gamma}=2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 由 $3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+5\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得

$$\boldsymbol{x}=-(3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+5\boldsymbol{\gamma})=-3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

习题 3.1

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$，试求 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$.

2. 设 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}10\\1\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\k\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\0\\\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}\mu\\-5\\4\end{pmatrix}$，且有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，求参数 k，λ，μ.

3.2　向量组的线性相关性

在线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=2,\\2x_1-x_2+3x_3=3,\\2x_1+2x_2-4x_3=4\end{cases}$ 中，用第一个方程乘以 2，就得到第三个方程，所以第三个方程是一个多余方程. 第三个方程存在与否并不影响原线性方程组的解，也就是说，原线性方程组与线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=2,\\2x_1-x_2+3x_3=3\end{cases}$ 是同解线性方程组. 那么，如何判断线性方程组中是否有多余方程呢？若有多余方程，如何判断哪些方程是多余的呢？其实，这些问题的答案就在我们这一节要讲的内容——向量组的线性相关性.

3.2.1　向量组的定义

定义 3.2.1　若干个维数相同的列向量(或行向量)构成的集合，称为**向量组**.

例 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$，对矩阵分块如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$. 称 m 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列向量组**，n 维行向量 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行向量组**.

反之，由 n 个 m 维列向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 构成一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)$，由 m 个 n 维行向量组成的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 构成一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$. 由此可知，一个向量组总可以与一个矩阵建立**一一对应**的关系. 因此可将含有 m 个 n 维向量的向量组记为

$$\boldsymbol{A}:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m.$$

3.2.2　向量组的线性组合

引例 1　考察非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$

令 $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，则该方程组可有以下向量形式：

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta} \tag{3.2.1}$$

由线性方程组的向量形式(3.2.1)可知，线性方程组是否有解，就相当于是否存在一组数 $x_1=k_1$，$x_2=k_2$，$\cdots$，$x_n=k_n$ 使关系式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$ 成立，即相当于常数项向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以表示成向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性关系式. 在探讨这一问题之前，我们先介绍几个有关向量组的概念.

定义 3.2.2　给定一组 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$，对任何一组实数 k_1，k_2，

$\cdots$，k_m，表达式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 称为该向量组的一个**线性组合**，其中 k_1，k_2，$\cdots$，k_m 叫作这个线性组合的**系数**.

定义 3.2.3　给定一组 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 和一个 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$，如果存在一组实数 k_1，k_2，$\cdots$，k_m，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能够由该向量组**线性表示**.

例 2　设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$，可由向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示.

另外，$\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\boldsymbol{\varepsilon}_2+0\boldsymbol{\varepsilon}_3(=\boldsymbol{\varepsilon}_1)$，$0\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+0\boldsymbol{\varepsilon}_3(=\boldsymbol{\varepsilon}_2)$，$0\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3(=\boldsymbol{\varepsilon}_3)$ 都是向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的线性组合.

注 1：一个向量组可以线性表示这个向量组中的每一个向量.

注 2：零向量是任意一个向量组的线性组合.

注 3：n 维向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 称为 n 维单位向量组，则任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 都可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

定理 3.2.1　向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$(唯一地)线性表示的充分必要条件是线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}$ 有(唯一的)解.

例 3　设有向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}5\\3\\-6\end{pmatrix}$ 及向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，试问 $\boldsymbol{\beta}$ 可否由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？若可以，求出线性表达式.

解　根据定理 3.2.1，设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，对矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$ 施以初等行变换：

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&5\\1&2&1&3\\-1&1&2&-6\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&5\\0&2&2&-2\\0&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&5\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

可知非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解$\begin{cases}x_1=5+c,\\x_2=-1-c,\\x_3=c,\end{cases}$其中 c 为任意常数. 因此 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一：$\boldsymbol{\beta}=(5+c)\boldsymbol{\alpha}_1+(-1-c)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3$，$c$ 为任意常数.

例 4 设有向量$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}5\\4\\-7\end{pmatrix}$及向量组$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$，试问$\boldsymbol{\beta}$可否由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，对矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$ 施以初等行变换：

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-3&5\\0&1&2&4\\-2&-5&4&-7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-3&5\\0&1&2&4\\0&-1&-2&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-3&5\\0&1&2&4\\0&0&0&7\end{array}\right),$$

该非齐次线性方程组无解，因此，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

3.2.3 向量组的线性相关与线性无关

引例 2 考察齐次线性方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}$ 令 $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，则该方程组可有以下向量形式：

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}. \tag{3.2.2}$$

若齐次线性方程组只有零解，即当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时，式(3.2.2)成立.

若齐次线性方程组有非零解，即存在一组不全为零的数 k_1，k_2，$\cdots$，k_n，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$.

由此，我们引入如下定义来刻画向量组的以上两种线性关系.

定义 3.2.4 设 n 维向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在一组不全为零的数 k_1，k_2，$\cdots$，k_m，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则称向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**；若当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则称向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**.

例如，给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$，存在一组不全为零的数 2，$-1$，0

使得 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 5　对于 n 维单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，讨论它的线性相关性.

解　设 $k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，于是必有 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. 即只有 k_1，k_2，…，k_n 全为零时，$k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=\mathbf{0}$ 才成立，所以 n 维单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

定理 3.2.2　m 个 n 维向量构成的向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 有非零解；线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$ 只有零解.

例 6　设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$，讨论它的线性相关性.

解　根据定理 3.2.2，设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$. 由于系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&3\\2&1&3\end{vmatrix}=0,$$

所以齐次线性方程组有非零解，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

推论 3.2.1　当向量的个数等于向量的维数时，向量组线性相关的充分必要条件是该向量组构成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$；而向量组线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

定理 3.2.3　m 个 n 维向量构成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是存在某一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

证　先证充分性.

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一个向量能够由其余向量线性表示，不妨假设为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，则有 $\boldsymbol{\alpha}_1=k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，于是 $-\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，这里 -1，k_2，k_3，…，k_m 不全为零. 由定义知，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

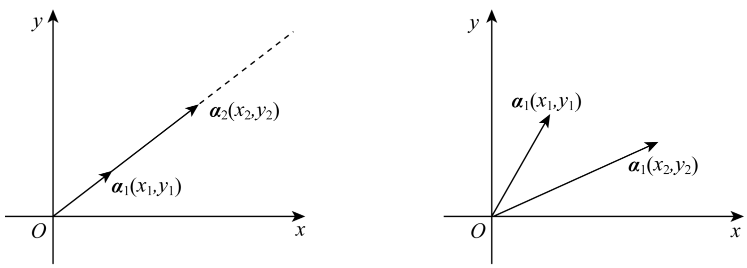
再证必要性.

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在一组不全为零的数使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$. 不妨假设 $k_1\neq 0$，于是有 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-\dfrac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m$，即向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

推论 3.2.2 含有零向量的向量组必然线性相关.

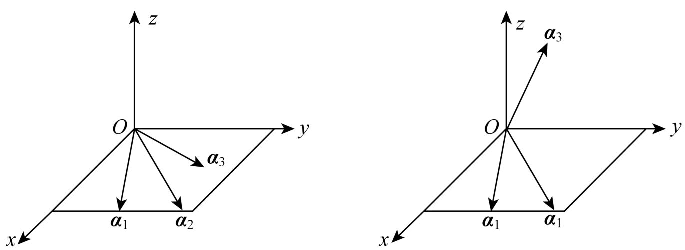
推论 3.2.3 两个向量线性相关的充分必要条件是它们的分量对应成比例.

两个向量线性相关的几何意义是这两个向量共线(如图 3.2.1 所示). 三个向量线性相关的几何意义是这三个向量共面(如图 3.2.2 所示).



α_1与α_2线性相关　　α_1与α_2线性无关

图 3.2.1　两个向量线性相关的几何表示



$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关　　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

图 3.2.2　三个向量线性相关的几何表示

给定一个向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 后，从这个向量组中任意抽取一部分向量构成一个新的向量组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r(1\leqslant r\leqslant m)$，则称新的向量组 $\boldsymbol{B}$ 为原向量组 $\boldsymbol{A}$ 的**部分组**.

推论 3.2.4 若部分组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r(1\leqslant r\leqslant m)$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性相关.

推论 3.2.5 若向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则部分组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r(1\leqslant r\leqslant m)$ 也线性无关.

定理 3.2.4 设向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 表示，且表示法唯一.

定理 3.2.5　若 m 个 n 维向量构成的向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，同时去掉其第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 个分量得到的 m 个 $n-1$ 维向量也线性相关；反之，若 m 个 $n-1$ 维向量构成的向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，同时增加其第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 个分量得到的 m 个 n 维向量也线性无关.

例 7　判别下列向量组的线性相关性.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\10\\15\\25\end{pmatrix}$.

解　(1) 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性无关，由定理 3.2.5 可知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，从而由推论 3.2.4 可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

习题 3.2

A 组

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是(　　).

A. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 不含零向量

B. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个线性无关

C. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示

D. 任一组不全为零的数 k_1，k_2，$\cdots$，k_s，都使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$

2. 下列各题中的向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由其余向量组成的向量组线性表示？若能，写出一个线性表示式.

(1) $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\8\\-1\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\2\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}5\\0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

3. 判断下列命题(或说法)是否正确，为什么？

(1) 如果向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，即$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则表示系数$k_1$，$k_2$，$k_3$不全为零.

(2) 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$是线性相关的，则$\boldsymbol{\alpha}_1$一定可由$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

(3) 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关，向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$线性相关，则有不全为零的数k_1，k_2，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$且$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，从而使$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2)=\mathbf{0}$，故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$线性相关.

(4) 如果存在不全为零的数k_1，k_2，…，k_m，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

(5) 若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1$不可由$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示.

4. 判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}7\\-13\\20\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\-8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\9\\27\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\16\\64\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\1\end{pmatrix}$.

B 组

1. 问t取何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}t\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\t\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\t\end{pmatrix}$线性相关？

2. 证明：$\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 的一个线性组合，则 $\boldsymbol{\beta}$ 也是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个线性组合.

3. 证明：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，问：

(1) λ 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示？

(2) λ 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一？

(3) λ 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\a+2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix}$，问：

(1) a，b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

(2) a，b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 能唯一地表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

3.3　向量组的秩

通过对向量组的线性相关性的学习，我们知道，当线性方程组有多余的方程时，删去多余的方程并不会影响线性方程组的解. 那么，一个线性方程组中究竟有多少个多余方程呢？多余方程的个数如何确定？这些问题涉及本节要讲的内容：向量组的秩以及向量组的极大无关组.

3.3.1　向量组的等价

定义 3.3.1　设两个 n 维向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 和 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$，如果向量组 $\boldsymbol{B}$ 中的每个向量 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1, 2, \cdots, s)$ 都可以由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示. 若向量组 $\boldsymbol{A}$ 中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1, 2, \cdots, t)$ 也可以由向量组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ **等价**.

由定义 3.3.1，若 n 维向量组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 可由 n 维向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示，则对向量组 $\boldsymbol{B}$ 中的每个向量 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1, 2, \cdots, s)$，存在一组数 $k_{1j}, k_{2j}, \cdots, k_{tj}$，使得

$$\boldsymbol{\beta}_j = k_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{tj}\boldsymbol{\alpha}_t = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t)\begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{tj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, s),$$

则有 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{t1} & k_{t2} & \cdots & k_{ts} \end{pmatrix} = \boldsymbol{AK}.$

其中 $\boldsymbol{K} = (k_{ij})_{t\times s}$ 称为向量组 $\boldsymbol{B}$ 由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示的系数矩阵．即若向量组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{K} = (k_{ij})_{t\times s}$.

若向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价，则存在系数矩阵 $\boldsymbol{K}_{t\times s}$ 与 $M_{s\times t}$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AK}_{t\times s}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BM}_{s\times t}$ 同时成立．亦即矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BY} = \boldsymbol{A}$ 同时有解 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{K}_{t\times s}$，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{M}_{s\times t}$.

定理 3.3.1 设两个 n 维向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_t$ 和 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_s$，则向量组 $\boldsymbol{B}$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示的充分必要条件是矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解，其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t)$，$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)$．向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BY} = \boldsymbol{A}$ 同时有解．

例 1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 等价．

证 令矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$，设 $\boldsymbol{BY} = \boldsymbol{A}$．由第 1 章利用行初等变换求矩阵方程有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3 \mid \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

可知矩阵方程 $\boldsymbol{BY} = \boldsymbol{A}$ 有解，$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示．

另一方面，由于 $|\boldsymbol{Y}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，所以 $\boldsymbol{Y}$ 可逆，于是有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AY}^{-1}$，即矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解，$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^{-1}$，也就是说向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示．

定理 3.3.2　设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 是两个 n 维向量组．如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且 $s > m$，那么向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 必线性相关．

推论 3.3.1　如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关，那么 $s \leqslant m$.

推论 3.3.2　任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关．

推论 3.3.3　两个线性无关的等价的向量组，必含有相同个数的向量．

3.3.2　向量组的秩

定义 3.3.2　若向量组 $\boldsymbol{A}$（含有有限个或无限多个向量）中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 满足：

（1）向量组 $\boldsymbol{A}_0$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

（2）向量组 $\boldsymbol{A}$ 中任意向量均可由向量组 $\boldsymbol{A}_0$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则称 $\boldsymbol{A}_0$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大线性无关向量组（简称极大无关组）．

例如：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$；$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_2 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$：故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$；$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大无关组．

注 1：一般来说，一个向量组的极大无关组不是唯一的．

注 2：由极大无关组的定义可知，向量组 $\boldsymbol{A}$ 中任一向量都可由它的极大无关组线性表示．反之，极大无关组作为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的部分组，一定可由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，因为向量组 $\boldsymbol{A}$ 与它自身的极大无关组总是等价的．向量组 $\boldsymbol{A}$ 所含向量个数可能是无限多个，但是它的极大无关组所含向量的个数不会超过向量的维数，从而一定是有限的．用向量组的极大无关组来代替向量组，会给我们的讨论带来极大的方便．

由推论 3.3.3 可知，一个向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量．因此，极大线性无关组所含向量的个数与极大线性无关组的选择无关，它直接反映了向量组本身的性质．

定义 3.3.3　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为该向量组的**秩**，记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$，或简记为 r.

注 3：由零向量组成的向量组的秩为 0.

例如，前面已讨论过，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 的极大无关组的向量的个数都是 2，故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 2$.

3.3.3　向量组的秩与矩阵的秩的关系

定理 3.3.3　矩阵的秩等于它的行向量组的秩，也等于它的列向量组的秩．

注 4： 由定理 3.3.3 可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩与列向量组的秩相等．可以证明：若对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 仅施以初等行变换得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组间有相同的线性关系，即行的初等变换保持了列向量间的线性无关性和线性相关性．它提供了求极大无关组的方法：以向量组中各向量为列向量组成矩阵后，只做初等行变换将该矩阵化为行阶梯形矩阵，则可直接写出所求向量组的极大无关组．同理，也可以向量组中各向量为行向量组成矩阵，通过做初等列变换来求向量组的极大无关组．

例 2 设向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$.

(1) 求向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩；

(2) 求向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组；

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 中的其余向量用所求的极大无关组线性表示．

解 (1) 以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$，用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&2\\4&1&2&1&3\\2&5&4&-1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-4r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&2\\0&9&6&9&-5\\0&9&6&3&-4\\0&3&2&3&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-\frac{1}{3}r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&2\\0&9&6&9&-5\\0&0&0&-6&1\\0&0&0&0&-\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1,$$

知 $r(\boldsymbol{A})=4$，故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$.

(2) 由于 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$，故向量组 $\boldsymbol{A}$ 的极大无关组含 4 个向量．由于行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 的四个非零行的非零首元在 1，2，4，5 四列，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组．这是因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&-2&2\\0&9&9&-5\\0&0&6&1\\0&0&0&-\dfrac{2}{3}\end{pmatrix},$$

所以齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_4\boldsymbol{\alpha}_4+x_5\boldsymbol{\alpha}_5=\mathbf{0}$ 只有零解，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关.

(3) 对 $\boldsymbol{B}_1$ 继续做初等行变换，化成行最简形 .

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&2\\0&9&6&9&-5\\0&0&0&-6&1\\0&0&0&0&-\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+5r_4\\r_1-2r_4}]{\substack{\frac{3}{2}r_4\\r_3-r_4}}\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&0\\0&9&6&9&0\\0&0&0&-6&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-9r_3\\r_1+2r_3}]{-\frac{1}{6}r_3}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&0\\0&9&6&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+2r_3]{\frac{1}{9}r_3}\begin{pmatrix}1&0&\dfrac{1}{3}&0&0\\0&1&\dfrac{2}{3}&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5),$$

所以$\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_2$. 由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$，$\boldsymbol{\beta}_5$有相同的线性相关性，所以 $\boldsymbol{\alpha}_3=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2$.

习题 3.3

A 组

1. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&3\\1&6\end{pmatrix}$的行向量组的秩 = ____________.

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$是一个 4 维向量组，若已知$\boldsymbol{\alpha}_4$可以表示为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合，且表示法唯一，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 求下列向量组的秩及一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组的向量线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

B 组

1. 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a，b 的值.

2. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\t\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-4\\5\\-2\end{pmatrix}$ 的秩为 2，求 t 的值.

3. 设有向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\end{pmatrix}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\a+3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\a+6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\a+4\end{pmatrix}$. 问 a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价？a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价？

3.4 向量空间

二维空间（即平面 $\mathbf{R}^2$）是由全体二元数组构成的，三维空间（即平面 $\mathbf{R}^3$）是由全体三元数组构成的，且它们对于数组的加法与数乘两种运算具有相同的特性：（1）两个二元数组经过加法与数乘运算后还是二元数组；（2）两个三元数组经过加法与数乘运算后还是三元数组. 那么是否存在 n 维空间呢？如果存在，n 维空间对于加法与数乘两种运算是否也具有以上的特性？$\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 中的坐标（坐标系）在 $\mathbf{R}^n$ 中又有怎样对应的概念？本节我们将具体介绍 n 维空间的相关概念以及性质.

3.4.1 向量空间及其子空间

定义 3.4.1 设 $\boldsymbol{V}$ 是 n 维向量的集合，如果对于任意 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，都有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，则

称 $\boldsymbol{V}$ **对向量的加法封闭**；如果对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$ 及任意 $k\in\mathbf{R}$，都有 $k\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，则称 $\boldsymbol{V}$ **对向量的数乘封闭**.

定义 3.4.2　设 $\boldsymbol{V}$ 是 n 维向量的集合，且 $\boldsymbol{V}$ 非空，如果 $\boldsymbol{V}$ 对向量的加法和数乘两种运算都封闭，则称集合 $\boldsymbol{V}$ 为 n 维**向量空间**，记为 $\mathbf{R}^n$.

例 1　判别下列集合是否为向量空间.

(1) $\boldsymbol{S}_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix},\ x\in\mathbf{R}\right\}$；　(2) $\boldsymbol{S}_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix},\ x\in\mathbf{R}\right\}$；

(3) $\boldsymbol{S}_3=\left\{\begin{pmatrix}0\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\middle|\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n\in\mathbf{R}\right\}$；　(4) $\boldsymbol{S}_4=\left\{\begin{pmatrix}1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\middle|\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n\in\mathbf{R}\right\}$.

解　(1) 对于 $\boldsymbol{S}_1$ 中的任意两个元素 $\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}b\\2b\end{pmatrix}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\2(a+b)\end{pmatrix}\in\boldsymbol{S}_1,\ \lambda\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\2(\lambda a)\end{pmatrix}\in\boldsymbol{S}_1,$$

所以，$\boldsymbol{S}_1$ 是一个向量空间.

(2) 对于 $\boldsymbol{S}_2$ 中的任意两个元素 $\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}b\\1\end{pmatrix}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\2\end{pmatrix}\notin\boldsymbol{S}_2,\ \lambda\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\\lambda\end{pmatrix}\notin\boldsymbol{S}_2,$$

所以，$\boldsymbol{S}_2$ 不是一个向量空间.

(3) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{S}_3$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{S}_3$，$\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{S}_3,\ \lambda\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\\lambda a_2\\\vdots\\\lambda a_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{S}_3,$$

所以 $\boldsymbol{S}_3$ 是一个向量空间.

(4) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{S}_4$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{S}_4$，$\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}\notin \boldsymbol{S}_4,\ \lambda\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda a_2\\\vdots\\\lambda a_n\end{pmatrix}\notin \boldsymbol{S}_4,$$

所以 $\boldsymbol{S}_4$ 不是一个向量空间.

事实上，在判别一个集合不是一个向量空间时，只需判别该集合对于向量的加法或者数乘两种运算中的一种运算不封闭即可.

定义 3.4.3　设有向量空间 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$，若 $\boldsymbol{V}_1\subseteq\boldsymbol{V}_2$（即 $\boldsymbol{V}_1$ 是 $\boldsymbol{V}_2$ 的子集），则称向量空间 $\boldsymbol{V}_1$ 是 $\boldsymbol{V}_2$ 的**子空间**.

定义 3.4.4　设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\in\mathbf{R}^n$，则由它们的所有线性组合构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间，称它为由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **生成的子空间**.

3.4.2　向量空间的基、维数与坐标

定义 3.4.5　向量空间 $\boldsymbol{V}$ 中的 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 如果满足下列条件：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

（2）向量空间 $\boldsymbol{V}$ 中的任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个**基**，称数 r 为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的**维数**，记为 $\dim(\boldsymbol{V})=r$，并称 $\boldsymbol{V}$ 为 r **维向量空间**.

注 1：只含有零向量的向量空间称为 0 维向量空间，它没有基.

注 2：如果将向量空间 $\boldsymbol{V}$ 看作向量组，则 $\boldsymbol{V}$ 的基就是向量组的极大无关组，$\boldsymbol{V}$ 的维数就是向量组的秩.

注 3：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个基，则 $\boldsymbol{V}$ 可表示为

$$\boldsymbol{V}=\{x\mid x=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r,\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\in\mathbf{R}\},$$

此时，$\boldsymbol{V}$ 又称为**由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 所生成的向量空间**.

定义 3.4.6　如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个基，则向量空间 $\boldsymbol{V}$ 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一线性表示为 $\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r$，则称数组 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 中的**坐标**.

特别地，在 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中取单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为基，则以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为分量的向量 $\boldsymbol{x}$ 可表示为 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 可见，向量在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 中的坐标就是该向量的分量，因此，$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 叫作 $\mathbf{R}^n$ 中的**自然基**.

例 2　验证 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的基，并求 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标.

解　令 $A=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$. 因 $|A|=4\neq 0$，即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以它是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

设 $\boldsymbol{\beta}$ 在这组基下的坐标为 x_1，x_2，x_3，即 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{Ax}$. 由 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}3&5&1&0\\1&2&1&-2\\4&1&-6&3\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-\frac{53}{4}\\0&1&0&-\frac{19}{2}\\0&0&1&-\frac{31}{4}\end{array}\right)$，得 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-\frac{53}{4}\\-\frac{19}{2}\\-\frac{31}{4}\end{pmatrix}$. 因此 $\boldsymbol{\beta}$ 在这组基下的坐标为 $\begin{pmatrix}-\frac{53}{4}\\-\frac{19}{2}\\-\frac{31}{4}\end{pmatrix}$.

定义 3.4.7　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的两个基，存在系数矩阵 $\boldsymbol{P}_{n\times n}$ 使得 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}_{n\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{P}_{n\times n}$ 称为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 的**过渡矩阵**.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的两个基，任一向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标为 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{Ax}$，$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{By}$，从而有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，于是得到 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，此式称为从坐标 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ 到坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的**坐标变换公式**. 或者 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=$

$\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，此式称为从坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$到坐标$(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$的**坐标变换公式**.

例 3　已知向量$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3$在基$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$下的坐标是$\begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{x}$在$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$下的坐标.

解　设向量$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标为$(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$，故

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&2\\-2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&2\\-2&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}.$$

习题 3.4

A 组

1. 向量空间$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, 0)\mid x_1, x_2\in\mathbf{R}\}$的维数为________________.

2. 下列子集是否构成$\mathbf{R}^3$的子空间.

(1) $\boldsymbol{V}_1=\{(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}\mid x_1-2x_2+3x_3=0\}$;

(2) $\boldsymbol{V}_2=\{(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}\mid x_1-2x_2+3x_3=4\}$;

(3) $\boldsymbol{V}_3=\{(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}\mid x_1\geqslant 0\}$.

3. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\a\end{pmatrix}$，若由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$生成的向量空间的维数为2，则$a=$________.

B 组

1. 假设 $V_1=\{x=(x_1, x_2, x_3, 0)\mid x_1, x_2, x_3\in\mathbf{R}\}$，$V_2=\{x=(x_1, x_2, x_3, 1)\mid x_1, x_2, x_3\in\mathbf{R}\}$，$V_3=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$，说明哪个是向量空间，哪个不是向量空间.

2. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$，求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

3. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并求向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}8\\7\\3\end{pmatrix}$ 在这个基下的坐标.

4. 设 $\mathbf{R}^3$ 的两个基分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\text{ 及 }\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

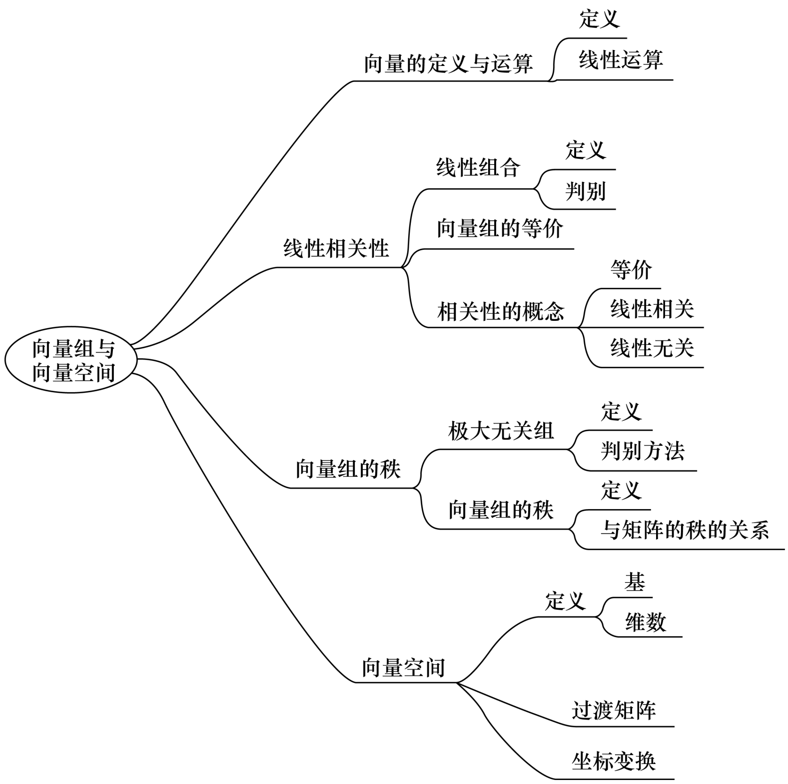
（1）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；

（2）已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

知识小结

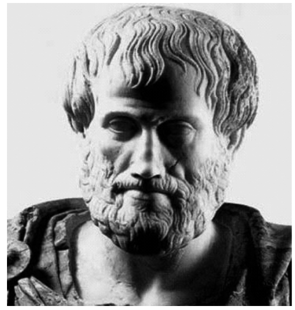
一级知识点	二级知识点	三级知识点	备注
向量组与向量空间	向量的概念	n 维向量	$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$
		向量的运算	加法、数乘、向量的乘积
	向量组的线性相关性	向量组	$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$
		线性组合	$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$
		线性表示	$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$
		线性相关的判定	存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$
			齐次线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$ 有非零解
			向量组构成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\lvert\boldsymbol{A}\rvert = 0$
			存在某一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合
		线性无关的判定	当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$
			齐次线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$ 只有零解
			向量组构成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\lvert\boldsymbol{A}\rvert \neq 0$
			向量组 $\boldsymbol{A}$ 中任何一个向量都不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示
	向量组的秩	向量组的等价	向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$
		向量组的秩	向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大线性无关组所含向量的个数
		向量组的秩与矩阵的秩的关系	矩阵的秩等于它的行向量组的秩，也等于它的列向量组的秩
	向量空间	n 维向量空间	任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$，$k \in \mathbf{R}$，都有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$，$k\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，则非空 n 维向量集合 $\boldsymbol{V}$ 为 n 维向量空间
		向量空间的基、维数与坐标	—
		过渡矩阵	—

思维导图


向量组与
向量空间
向量的定义与运算
定义
线性运算
线性相关性
线性组合
定义
判别
向量组的等价
相关性的概念
等价
线性相关
线性无关
向量组的秩
极大无关组
定义
判别方法
向量组的秩
定义
与矩阵的秩的关系
向量空间
定义
基
维数
过渡矩阵
坐标变换

拓展阅读

1. 向量的发展简史

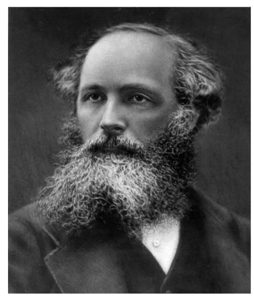


亚里士多德

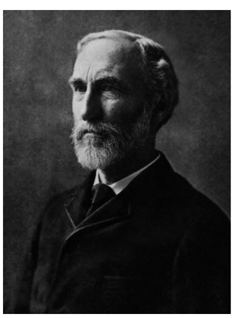
向量又称为矢量，最初应用于物理学. 很多物理量如力、速度、位移以及电场强度、磁感应强度等都是向量. 大约公元前350年前，古希腊著名学者亚里士多德(Aristotle，公元前384—前322)就知道了力可以表示成向量，两个力的组合作用可用著名的平行四边形法则来得到.

哈密尔顿

“向量”一词来自力学、解析几何中的有向线段. 最先使用有向线段表示向量的是英国科学家牛顿(Isaac Newton，1643—1727). 向量进入数学并得到发展的阶段是18世纪末期，挪威测量学家韦塞尔(Wessel，1745—1818)首次利用坐标平面上的点来表示复数 $a+bi$，并利用具有几何意义的复数运算来定义向量的运算. 把坐标平面上的点用向量表示出来，并把向量的几何表示用于研究几何问题与三角问题. 人们逐步接受了复数，也学会了利用复数来表示和研究平面中的向量，向量就这样平静地进入了数学. 但复数的利用是受限制的，因为它仅能表示平面，若有不在同一平面上的力作用于同一物体，则需要寻找所谓三维“复数”以及相应的运算体系. 19世纪中期，英国数学家哈密尔顿(Hamilton，1805—1865)发明了四元数(包括数量部分和向量部分)的向量. 他的工作为向量代数和向量分析的建立奠定了基础. 随后，电磁理论的发现者、英国的数学物理学家麦克斯韦(Maxwell，1831—1879)把四元数的数量部分和向量，从而创造了大量的向量分析.



麦克斯韦



吉布斯

三维向量分析的开创，以及与四元数的正式分裂，是美国的吉布斯(Gibbs，1839—1903)和英国的海维塞德(Oliver Heaviside，1850—1925)于19世纪80年代各自独立完成的. 他们提出，一个向量不过是四元数的向量部分，但不独立于任何四元数. 他们引进了两种类型的乘法，即数量积和向量积. 并把向量代数推广到变向量的向量微积分. 从此，向量的方法被引进到分析和解析几何中来，并逐步完善，成为一套优良的数学工具.

一般日常生活中使用的向量是一种带几何性质的量，除零向量外，总可以画出箭头表示方向. 但是在高等数学中还有更广泛的向量. 例如，把所有实系数多项式的全体看成一个多项式空间，这里的多项式都可看成一个向量. 在这种情况下，要找出起点和终点甚至画出箭头表示方向是办不到的. 这种空间中的向量比几何中的向量要广泛得多，可以是任意数学对象或物理对

象. 这样，就可以指导线性代数方法应用到广阔的自然科学领域中去了. 因此，向量空间的概念已成为数学中最基本的概念和线性代数的中心内容，它的理论和方法在自然科学的各领域中得到了广泛的应用. 而向量及其线性运算也为“向量空间”这一抽象的概念提供了一个具体的模型.

从数学发展史来看，历史上很长一段时间，空间的向量结构并未被数学家们认识，直到 19 世纪末 20 世纪初，人们才把空间的性质与向量运算联系起来，使向量成为具有一套优良运算通性的数学体系.

2. 航天科学中的向量空间

2022 年 4 月 16 日 9 时 56 分，神舟十三号载人飞船返回舱在东风着陆场成功着陆. 神舟十三号载人飞船是中国空间站关键技术验证阶段的最后一次任务，此次飞行，它将验证空间站建造和运营所需的最后几项关键技术，为中国建造“天宫”打下重要基石. 神舟十三号载人飞行任务的圆满成功，标志着空间站关键技术验证阶段任务圆满完成，中国空间站即将进入建造阶段.

航天科技毫无疑问是当今科技水平要求最高的领域. 航天科技涉及工程学的许多分支——航空、化学、电子、液压以及机械工程等. 航天飞机的控制系统对飞行而言是绝对关键的部件之一. 由于航天器是一个不稳定的空中机体，在大气层飞行时它需要不间断地用计算机监控.

从数学的角度看，每个飞行状态就是一个向量，所有可能的向量就组成了一个向量空间. 飞行控制系统不断向空气动力控制表面和多个小推进器喷口发送命令. 各种各样的传感器的信号被添加到计算机信号中，每一个系统的输入和输出信号都是函数，这些函数的加法与数量乘法在应用中是非常重要的.

每个飞行状态主要包括了仰俯角、仰俯速率和仰俯加速度. 通过对这些数据的分析后，制定飞行策略，通过控制器加以调整飞行状态. 图 3.4.1 展示了一个典型的闭环反馈系统，它用来控制飞行器的飞行状态. 所有可能的输入(函数)的集合组成了一个向量空间，这些数据的运算，具有类似于 n 维向量 $\mathbf{R}^n$ 中向量的加法和数量乘法的代数性质. 因此，对各种输入数据的判定，其实就是向量加减法、乘法运算及矩阵与向量的乘积运算，计算机则利用这些计算结果指导输出指令，最终对飞行器状态进行调整.

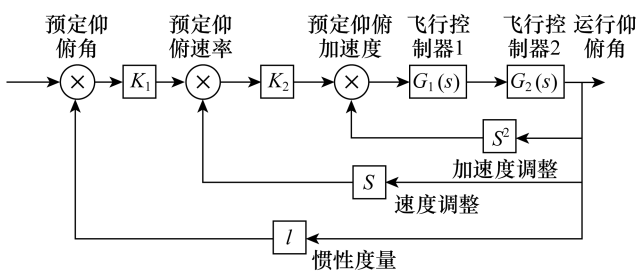


图 3.4.1　航天飞机的俯仰角控制系统

总复习题 3

A 组

1. 选择.

(1) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个零向量

B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有两个向量成比例

C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量不成比例

D. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一向量可由其他向量线性表示

(2) 设 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合，则 $\boldsymbol{\beta} =$ (　　).

A. $(0, 3, 0)^{\mathrm{T}}$　　B. $(2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

C. $(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$　　D. $(0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$

(3) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 2, 4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 3, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 0, 7, 14)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (1, -2, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_5 = (2, 1, 5, 10)^{\mathrm{T}}$，则该向量组的极大线性无关组为（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_5$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_1 = (b_1, b_2)^{\mathrm{T}}$，下列结论正确的是(　　).

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1$ 也线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1$ 也线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 也线性相关

D. 以上都不对

(5) 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则(　　).

A. 存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$

B. 存在一组全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$

C. 存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$

D. 对 $\boldsymbol{\beta}$ 的表达式唯一

2. 填空.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是 R^2 的两个基，则从基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 的过渡矩阵为 ________.

(2) 已知两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3 =$

$\begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix}$，并且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，则 $a=$________.

(3) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $a=$________.

3. 设四维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2+a\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3+a\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4+a\\4\end{pmatrix}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$；

(2) 对(1)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$，证明：$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$，求向量空间 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\{\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4+k_5\boldsymbol{\alpha}_5 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\in\mathbf{R}\}$ 的基与维数.

6. 验证：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基，并求 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ 在这个基下的坐标；

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 也是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基，并求从基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$，以及 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标.

B 组

1. 选择.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量，则下述结论中正确的是(　　).

A. 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

B. 若对任意一组不全为零的数 k_1, k_2, …, k_s，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

C. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则其中任意一个向量都可以用其余 $s-1$ 个向量线性表示

D. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 k_1, k_2, …, k_s，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则(　　).

A. $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

B. $\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

C. $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

D. $\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充分必要条件是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个是零向量

B. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有两个向量对应分量成比例

C. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可以用其余 $s-1$ 个向量线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的任一部分组线性相关

(4) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 $r(r<s)$，则(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个向量线性无关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r-1$ 个向量线性无关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一向量可由其他 r 个向量线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r+1$ 个向量线性无关

2. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-3a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-b-2\\a+2b\end{pmatrix}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$，试求：

(1) a, b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性表示；

(2) a, b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示，并求出表达式；

(3) a, b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示法不唯一，并求出表达式.

3. 已知向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$，验证向量组 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}6\\a+1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$，试问：

（1）a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关？线性无关？

（2）a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？线性无关？

（3）a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？线性无关？

5. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\x\\3\\y\end{pmatrix}$，求 x，y 的值，使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩等于 2.

6. 设 $\mathbf{R}^3$ 中两个基分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

（1）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$；

（2）已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.